

Р. М. БАРСЕГЯН

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФИЛЬТРАЦИИ
 ЖИДКОСТИ К СКВАЖИНАМ НА СЕТОЧНЫХ МОДЕЛЯХ

При решении краевых задач фильтрации широкое распространение получили электрические сетки сопротивлений и емкостей. Рассмотрев задачи стационарной фильтрации несжимаемой жидкости в однородной пористой среде, Ю. Г. Толстов [1] экспериментально показал, что после замены скважины узловой точкой в сеточной области величина дебита и картина изобар получаются такими, как если бы скважина имела некоторый радиус r_0 , значительно больший истинного радиуса r_c . После такой замены постановка краевой задачи видоизменяется и, естественно, можно ожидать отклонения в ее решении. При моделировании пластовых систем с любым количеством скважин не все скважины могут совпасть с узловыми точками. Чтобы избежать погрешности, связанной с неточным воспроизведением координат скважины, в работе [1], помимо схемы интерполяции „узел“, рассмотрены и другие схемы: так называемый „крест“, когда скважина находится в центре блока, и „середина стороны“, когда скважина находится на середине стороны блока. Причем, при моделировании по схеме „узел“ в узловой точке было включено дополнительное сопротивление, равное по величине сопротивлению области, заключенной между concentрическими окружностями с радиусами r_0 и r_c (кольцо), т. е. сопротивление

$$R_s = \frac{R_0}{2\pi} (\ln r_0 - \ln r_c) = \frac{R_0}{2\pi} (\ln r'_0 - \ln r'_c) = \frac{R_0}{2\pi} (-\ln r'_c + A),$$

где $r'_0 = r_0/M$; $r'_c = r_c/M$; R_0 — удельное сопротивление сетки; M — масштаб. В результате решения большой группы задач (при различных значениях параметров) было получено: $A = -1,62$. Для схем „крест“ и „середина стороны“ также было введено дополнительное сопротивление и экспериментальным путем получено соответственно: $A = -2,34$ и $A = -1,9$.

В работе [2] рассматривается вопрос о моделировании скважин на сеточном интеграторе и дается другой вывод выражений дополнительного сопротивления для трех вышеуказанных схем интерполяции. Отмечается, что для схемы „крест“ величина $A = -2,34$ ошибочна и получается: $A = -1,57$ („узел“), $A = -2,23$ („середина стороны“). Экспериментальные значения числа A , полученные в [2], таковы:

$$A = \begin{cases} -1,62 \text{ „узел“} \\ -1,15 \text{ „крест“} \\ -2,44 \text{ „середина стороны“} \end{cases}$$

При моделировании скважины на сеточном интеграторе в случае, когда скважина совпадает с узлом сетки, В. М. Шестаковым [3] эмпирическим путем получено $A = -1,43$.

В статье дается теоретическое обоснование необходимости введения дополнительного сопротивления после замены скважины точкой, а также на конкретных примерах показывается приемлемость метода.

1. Случай одного пласта. Нужно отметить, что на некотором расстоянии от скважины отток или приток жидкости становится радиальным; напор или потенциал, определяется логарифмической функцией, а в центре скважины имеется логарифмическая особенность. Поэтому при замене скважины точкой в случае моделирования на сеточном интеграторе или при расчетах с помощью ЭЦВМ получается расхождение от истинных результатов: Тот факт, что потенциал (напор) стремится к бесконечности, когда радиус скважины стремится к нулю, требует особого подхода к решению задач оттока или притока жидкости к скважинам на электрических моделях или с помощью ЭЦВМ.

Если считать, что на некотором участке ячейки с центром в скважине-точке имеет место радиальный характер движения жидкости к скважине (от скважины), то в точечной скважине, как равноправной точке в плоскости ячейки, потенциал (напор) имеет некоторое значение. За это значение (как первое приближение) целесообразно брать среднее значение потенциала (напора) по некоторой части ячейки (по всей той площади, где имеется радиальное движение к точечной скважине). Этим и на моделях устранивается логарифмическая особенность в точечной скважине.

Рассмотрим три схемы интерполяции в отдельности.

1°. „Узел“ — скважина совпадает с узлом θ сеточной области (рис. 1, а). Шаг сетки Δx постоянен. Радиальное движение к скважине

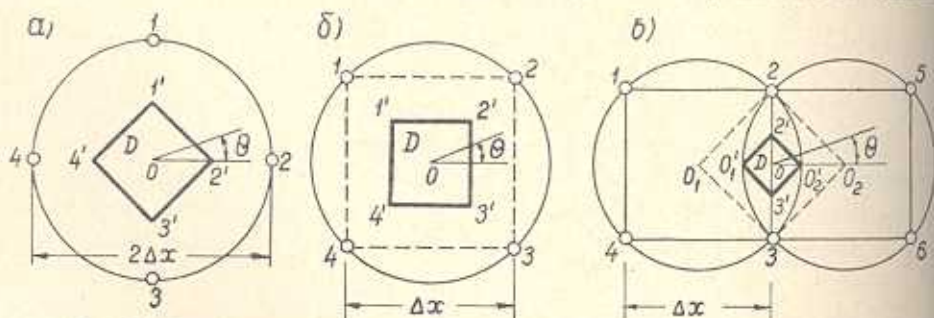


Рис. 1. Схемы интерполяции: а) „узел“; б) „крест“; в) „середина стороны“.

не нужно принять на площади D квадрата $1'2'3'4'$, где $01' = 02' = 03' = 04' = \Delta x/2$.

Как известно, при оттоке потенциал ϕ имеет вид:

$$\varphi = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c}$$

или

$$\varphi = \varphi_c + QR, \quad \text{где } R = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c}.$$

Найдем φ_{cp} по формуле:

$$\varphi_{cp} = \frac{1}{\text{пл. } D} \iint_D \varphi ds = \frac{8}{(\Delta x)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\Delta x}{2(\sin\theta + \cos\theta)}} \left(\varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c} \right) r dr,$$

где D — квадрат $1'2'3'4'$. После вычислений получим:

$$\varphi_{cp} = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right), \quad \text{где } A = -1,42.$$

2°. „Крест“ — скважина совпадает с точкой пересечения диагоналей ячейки (рис. 1, б). Радиальное движение жидкости от скважины распространяется по площади квадрата $1'2'3'4'$. В этом случае

$$\varphi_{cp} = \frac{32}{(\Delta x)^2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{\Delta x}{4\cos\theta}} \left(\varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c} \right) r dr,$$

т. е.
$$\varphi_{cp} = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right), \quad \text{где } A = -1,06.$$

3°. „Середина стороны“ — скважина совпадает с серединой стороны ячейки (рис. 1, в). Радиальное движение от скважины распространяется по площади $\theta_1 2 \theta_2 3$. В этом случае

$$\varphi_{cp} = \frac{32}{(\Delta x)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\Delta x}{4(\sin\theta + \cos\theta)}} \left(\varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c} \right) r dr,$$

т. е.
$$\varphi_{cp} = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right), \quad \text{где } A = -2,12.$$

Таким образом, получается, что при замене скважины точкой необходимо к потенциалу φ_c в скважине-точке прибавить дополнительную величину

$$\varphi_3 = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right),$$

где
$$A = \begin{cases} -1,42 & \text{для „узла“} \\ -1,06 & \text{для „креста“} \\ -2,12 & \text{для „середины стороны“}. \end{cases}$$

При моделировании (после замены скважины точкой) нужно в точечной скважине ввести дополнительное сопротивление

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right).$$

Как видно, величина этого сопротивления зависит от способа интерполяции.

Необходимость замены скважины точкой остается в силе и при решении задач фильтрации с помощью ЭЦВМ. На основе рассмотрения большого числа частных примеров Г. Г. Вахитов [4] показал, что поле давления, полученное при сеточном решении в результате замены скважины точкой, сходно с полем давления в случае скважины с радиусом $r_{эф} = 0,2 \Delta x$.

Используя полученные выше результаты, найдем точные выражения для $r_{эф}$ при трех видах интерполяции.

Если скважина совпадает с узлом сеточной области, то

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} - 1,42 \right). \quad (1)$$

с другой стороны, сопротивление кольца с радиусами r_c и $r_{эф}$

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_{эф}}{r_c}.$$

Пусть $r_{эф} = \alpha \Delta x$, где α — некоторая постоянная, подлежащая определению, тогда

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\alpha \Delta x}{r_c}. \quad (2)$$

Приравнивая (1) и (2) для R_1 , получим: $\alpha = e^{-1,42} \approx 0,24$, т. е. $R_{эф} = 0,24 \Delta x$, что на $0,04 \Delta x$ отличается от результата, полученного Г. Г. Вахитовым экспериментальным путем. Им же утверждается, что если при покрытии области сеткой некоторые скважины не совпадут с узлами, то с некоторым сдвигом их можно совместить с узлами.

Из вышеизложенного ясно, что сдвиг таких скважин, как, например, скважин, совпадающих с центром ячейки или с серединой стороны, в узел недопустим. Докажем невозможность таких сдвигов. Для этого получим выражения R_1 для остальных двух систем интерполяции.

Для „креста“ имеем:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} - 1,06 \right). \quad (3)$$

Приравнивая (2) и (3), получим:

$$\alpha = e^{-1,06} = 0,35, \text{ т. е. } r_{эф} = 0,35 \Delta x.$$

Для „середины стороны“ аналогично получим:

$$\alpha = e^{-2,12} = 0,12, \text{ т. е. } r_{эф} = 0,12 \Delta x.$$

Таким образом, для этих схем выражения $r_{эф}$ отличаются от выражения $r_{эф}$ для схемы „узел“. Следовательно, при решении задач

фильтрации жидкости к скважинам (от скважин) на ЭЦВМ можно радиус скважины заменить новым радиусом $r_{эф}$, достаточно большим относительно истинного. Причем, если скважина совпадает с „узлом“, то $r_{эф} = 0,24 \Delta x$, при схеме „крест“ $r_{эф} = 0,35 \Delta x$ и при схеме „середины стороны“ $r_{эф} = 0,12 \Delta x$. Но решение конкретных задач этим методом связано с большим объемом вычислений на ЭЦВМ. Поэтому более эффективным можно считать приведенный выше метод, на основании которого при решении задач движения жидкости к скважинам (от скважин) каждая скважина заменяется точкой с переносом в точечную скважину суммы забойного и осредненного по площади радиального течения напоров (потенциалов). В подтверждение этого приведем численные примеры.

Рассмотрим приток жидкости в круговом однородном пласте радиусом R_k к одиночной центральной скважине радиусом r_c . На контуре скважины поддерживается напор $H_c = \text{const}$, на контуре питания — $H_k = \text{const}$. Точное решение поставленной задачи дается формулой:

$$H(r) = H_k - \frac{H_k - H_c}{\ln \frac{R_k}{r_c}} \ln \frac{R_k}{r}. \quad (4)$$

Напор, вычисленный в дискретных точках по формуле (4) (точное решение H_t), сопоставляется со значениями напора приближенного решения H_1 по методу работы [4] и со значениями напора H_2 по предлагаемому методу. Расчеты проведены на ЭЦВМ при исходных данных, приведенных в табл. 1. Область покрывается квадратной сеткой

Таблица 1

Вариант	H_k м	H_c м	R_k м	r_c м
I	180	110	900	0,15
II	180	140	900	0,15

с шагом $h = 150$ м. Вследствие симметрии рассматривается только 1/8 часть круга, состоящая из 17 узлов. Граничные условия, заданные на дуге окружности, переводятся на контур сеточной области с помощью метода Коллатца. Результаты вычислений приведены в табл. 2. Как видно из табл. 2, расхождение между приближенным решением H_2 , а также H_1 и точным решением H_t не превосходит погрешности разностного метода.

2. Случай гидравлически связанных водоносных горизонтов.
Если в области движения имеются скважины произвольного количества, то эта многосвязная область заменяется односвязной, которой заранее задаются потенциалы или напоры. Для простоты рассмотрим стационарное движение жидкости от совершенной центральной скважины (отток) в круговом пласте, образованном двумя горизонтальными слоями — верхним слабопроницаемым и нижним сильнопроницаемым — при постоянном напоре на кровле верхнего слоя. Потенциал ϕ нижнего водоносного горизонта, надстилающего водоупор, в этом случае имеет вид:

Таблица 2

Номера узлов	I вариант			II вариант		
	$H_7, м$	$H_1, м$	$H_2, м$	$H_7, м$	$H_1, м$	$H_2, м$
1	165,58	165,01	166,00	171,76	171,43	172,06
2	171,16	170,82	171,51	174,95	174,75	175,06
3	174,42	174,25	174,63	176,81	176,71	176,99
4	176,74	176,65	176,81	178,14	178,08	178,21
5	178,53	178,49	178,68	179,16	179,14	179,18
6	168,37	168,51	168,92	173,36	173,43	173,94
7	172,06	172,01	172,43	175,46	175,43	175,68
8	174,85	174,77	175,11	177,06	177,01	177,20
9	176,98	176,92	177,11	178,28	178,24	178,30
10	178,69	178,67	178,73	179,25	179,24	179,28
11	173,95	173,94	174,35	176,54	176,54	176,64
12	175,90	175,88	176,09	177,66	177,65	177,71
13	177,63	177,61	177,71	178,65	178,64	178,70
14	179,13	179,12	179,17	179,50	179,50	179,52
15	177,21	177,20	177,31	178,41	178,40	178,43
16	178,53	178,52	178,58	179,16	179,16	179,18
17	179,52	179,52	179,56	179,73	179,73	179,75

$$\varphi(r) = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} [K_0(\lambda r_c) - K_0(\lambda r)], \quad (5)$$

где φ_c — потенциал в скважине; $\lambda = \sqrt{\frac{k}{kT\bar{T}}}$; k , \bar{k} и T , \bar{T} — соответственно коэффициенты фильтрации и мощности сильно- и слабо-проницаемых слоев.

При замене скважины точкой двухсвязная область (кольцо) заменяется односвязной. Заданное значение потенциала φ_c на забое заменяется суммой потенциала φ_c и среднего потенциала по площади круга φ_{cp} , которая задается в центре односвязной области. Так как в (5) функция $K_0(\lambda r)$ (функция Макдональда) обращается в бесконечность при $r = 0$, то, как и в п. 1^о, в центре скважины за среднее значение (φ_{cp}) функции $\varphi(r)$ берем:

$$\varphi_{cp} = \frac{1}{\text{пл. } D} \int_D \varphi dS.$$

Если параметр λ малый, что обычно имеет место в практике, то, ограничиваясь первыми членами разложения в ряды функции Бесселя $I_0(\lambda r)$ и Макдональда $K_0(\lambda r)$, можно воспользоваться следующими приближенными равенствами:

$$K_0(\lambda r_c) \approx - \left(C + \ln \frac{\lambda r_c}{2} \right);$$

$$K_0(\lambda r) \approx - \left(C + \ln \frac{\lambda r}{2} \right),$$

где C — число Эйлера. Тогда (5) заменяется выражением:

$$\varphi = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \left[- \left(C + \ln \frac{r_c}{2} \right) + \left(C + \ln \frac{r}{2} \right) \right],$$

т. е.

$$\varphi = \varphi_c + \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r}{r_c},$$

которое совпадает с выражением для потенциала в случае однослойного пласта.

Таким образом, в рассматриваемом случае при малом λ можно использовать все результаты, полученные для однослойного пласта (п. 1^а), а именно: при замене скважины точкой нужно к потенциалу скважины φ_c добавить

$$\varphi_i = \frac{Q}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right).$$

где $A = \begin{cases} -1,42 & \text{для „узла“} \\ -1,06 & \text{для „креста“} \\ -2,12 & \text{для „середины стороны“} \end{cases}$

Следовательно, при моделировании в точке, заменяющей скважину, нужно ввести дополнительное сопротивление R_z :

$$R_z = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{\Delta x}{r_c} + A \right).$$

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 16.IX.1969.

Բ. Մ. ՔԱՐԱՆՂՅԱՆ

ԷԼԵԿՏՐԱԿԱՆ ՄՈԳԵԼՆԵՐԻ ՎՐԱ ՀԵՂՈՒԿԻ ԳԵՊԻ ՀՈՐԱՆՑՔ ԿԱՏԱՐՎՈՂ
ՖԻԼՏՐԱՅԻՆՍԻ ՄՈԳԵԼԱՅՄԱՆ ԱՌԱՆՁԱՀԱՏԱԿՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ն փ ն ի մ

Հորանցքների մոդելացման գծվարությունները կապված են նրանց արածագծերի և ֆիլտրացիայի տիրույթի եզրագծի անհամաչափելիության հետ, որի պատճառով հորանցքները մոդելի վրա փոխարինվում են կետերով: Հոգվածում առաջարկվում է մեթոդ, քառ որի հնարավոր է իրագործել հորանցքների մոդելացումը վերջիններիս երեք հնարավոր դիրքերի դեպքում մոդելի էլեմենտի (բջջի) վրա: Մոդելի վրա հորանցք-կետում արվում է լրացուցիչ պատենցիալ, որը հավասար է պատենցիայի միջին մեծությունը քառ բջջի մակերեսի: Առաջարկվող մեթոդը առավել շահավետ է ֆիլտրացիայի խնդիրները հաղթիչ մեթոդների օգնությամբ լուծելիս: Մեկ շերտի համար ստացված արդյունքները տարածված են հիդրավիկորեն կապված ջրատար հորիզոնների դեպքի վրա:

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстов Ю. Г. Применение метода электрического моделирования физических явлений к решению некоторых задач подземной гидравлики. ЖТФ, т. 12, вып. 10, 1942.
2. Гомонова К. В. К вопросу моделирования притока к скважинам на электрических системах. Труды Уф. НИИ, вып. 6, 1960.
3. Шестаков В. М. Теоретические основы оценки подпора водопонижения и дренажа. Изд. МГУ, 1965.
4. Вахитов Г. Г. Эффективные способы решения задач разработки неоднородных нефтеводоносных пластов. Гостоптехиздат, 1963.