

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Е. ПАРОНИКЯН

**ОБ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТКИ ДЛЯ РАСЧЕТА МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

Дано строгое математическое определение таким применяемым в численных расчетах магнитного поля понятиям, как оптимальная сетка и оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов. Для решения полевых задач методом конечных элементов предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации, аппроксимирующей оптимальную сетку.

Ключевые слова: электромагнитное поле, метод конечных элементов, динамическая декомпозиция элементов дискретизации.

1. Введение. При численном решении краевых задач методом конечных элементов важным этапом является выбор сетки дискретизации исследуемой области. В работе [1] оптимальная сетка строится при помощи конформного отображения регулярной квадратной сетки. В ней ограничиваются изучением двумерных эллиптических уравнений второго порядка с малым параметром при старших производных и несложной геометрией, что дает возможность нахождения аналитического вида соответствующего конформного отображения. В нелинейных полевых задачах со сложной геометрией найти аналитический вид оптимальной сетки практически невозможно, и потому приходится приближаться к оптимальной сетке путем последовательной декомпозиции сеточных узлов. В работе [2] был предложен интуитивный алгоритм динамической декомпозиции конечноэлементной сетки дискретизации исследуемой области, основанный на добавлении узлов в элементах с наибольшей суммарной невязкой в их трех вершинах.

В настоящей работе дано строгое математическое определение понятиям "оптимальная сетка" и "оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов" на основе непрерывного отображения регулярной треугольной сетки. Для решения полевых задач методом конечных элементов предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации, аппроксимирующей оптимальную сетку. Предложенный подход основан на последовательной композиции (или декомпозиции) сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получаемых суммарных невязок на двух вершинах отрезков.

Метод апробирован путем реализации компьютерной программы автоматического построения оптимальной сетки для расчета плоских магнитных полей при помощи треугольных конечных элементов.

2. Топологическая формулировка задачи расчета магнитного поля. Рассмотрим на плоскости P магнитное поле, созданное электрическим током, причем токнесущую область полагаем одноточечной. Обозначим через F

совокупность факторов, влияющих на магнитное поле (геометрия ферромагнетиков, их кривая намагничивания, значения токов и т.д.). Задачу нахождения поля при наличии факторов F обозначим через Z_F . Решить задачу Z_F означает - определить распределение векторного магнитного потенциала A на всей плоскости P . Соответствующую эквипотенциальную линию уровня A_k обозначим через $L(F, A_k)$.

Векторный магнитный потенциал A удовлетворяет уравнению Максвелла в среде, поэтому он обязан быть дважды непрерывно дифференцируемым во всех точках плоскости. Следовательно, эквипотенциальные линии $L(F, A_k)$ суть непрерывные замкнутые гладкие кривые. Гладкость понимается в смысле существования криволинейного интеграла $\oint_{L(F, A_k)} dl$,

где dl - элемент длины дуги.

Пусть Z_0 - задача нахождения магнитного поля на плоскости P_0 , в которой отсутствуют ферромагнетики. Очевидно, для этой задачи эквипотенциальные линии $L(0, A_k)$ суть концентрические окружности радиуса r_k с центром в токнесущей области.

С точки зрения математической топологии, линии $L(F, A_k)$ и $L(0, A_k)$ эквивалентны (с точностью до преобразования деформации). Поэтому имеет место следующее утверждение.

Теорема 1. Для каждой задачи Z_F существует отображение $f_F: P \rightarrow P_0$, т.е. плоскости P в плоскость P_0 , такое, что для всех уровней A_k эквипотенциальные линии $L(F, A_k)$ переходят в концентрические окружности, т.е. $f_F (L(F, A_k)) = L(0, A_k)$. Это отображение является взаимно-однозначным и непрерывным.

Доказательство. Пусть задача Z_F решена и в произвольной точке X плоскости P известно значение потенциала A_k . Точке X поставим в соответствие точку $f_F(X)$ на окружности $L(0, A_k)$ радиуса r_k . На эквипотенциальной линии $L(F, A_k)$ выберем начало отсчета O_k . Угловую координату вычислим по выражению $\varphi = 2\pi \int_{O_k}^X dl / \oint_{L(F, A_k)} dl$. Тогда

искомый образ $f_F(X)$ есть точка с полярными координатами (r_k, φ) . Непрерывность отображения следует из возможности выбора начала отсчета на разных эквипотенциальных линиях непрерывным образом.

Зная отображение f_F , можно найти распределение магнитного потенциала, и наоборот. Решение полевой задачи Z_F эквивалентно нахождению отображения f_F .

3. Численный расчет магнитного поля методом конечных элементов. Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) = \delta,$$

где δ - плотность тока; v - величина, обратная магнитной проницаемости.

Численный расчет двумерного магнитного поля методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений

$$\sum_e \left(v_e \sum_{i=1}^K A_i \beta_{ij}^e - \frac{\delta \Delta}{3} \right) = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (1)$$

где A_i - значение потенциала A в узле i ; v_e - значение (внутри элемента e ; δ_e - значение δ внутри элемента e ; β_{ij} - коэффициент взаимодействия вершин i и j ; N - число некраевых узлов.

В (1) внешнее суммирование осуществляется по всем элементам e , содержащим узел j , а внутреннее суммирование - по всем узлам i , содержащимся в элементе e (K - число таких узлов).

В случае сетки из плоских треугольных элементов коэффициент β_{ij} по вершинам i, j, m треугольника e имеет следующий вид (здесь $K=3$):

$$\begin{cases} \beta_{ii}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2], \\ \beta_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)], \end{cases} \quad (2)$$

где (x_i, y_i) - декартовы координаты узла i ; Δ - площадь треугольника.

Заметим, что для каждого узла j в (1) принимают участие только непосредственные соседи узла j . Таким образом, получается система уравнений с неизвестными A_i , причем количество уравнений равно количеству неизвестных, т.е. количеству некраевых узлов.

4. Оптимальные сетки. При построении сетки конечных элементов следует учитывать два условия:

- а) внутри элемента физическая среда должна быть однородной, т.е. границы раздела сред должны быть границами раздела элементов;
- б) вершины элементов должны быть как можно ближе друг к другу, чтобы их участие в (1) и (2) в качестве "соседних узлов" было обоснованным. Дадим строгое математическое обоснование условию "б" на основе введенного выше отображения f_F . Так как на плоскости P_0 задача Z_0 является тривиальной, то многие понятия легко определяются для задачи Z_0 . Затем эти понятия с помощью отображения f_F переносятся на задачу Z_F .

Так, например, из соображений симметрии следует, что для задачи Z_0 оптимальной является регулярная сетка S_0 из плоских равносторонних треугольников (пчелиные соты). Заметим, что при отображении f_F тройка точек на плоскости P переходит в тройку точек на плоскости P_0 . Следовательно, треугольник переходит в треугольник, а сетка из треугольных элементов переходит опять же в сетку из треугольников.

Определение 1. Сетка из треугольных элементов S называется оптимальной для данной полевой задачи Z_F , если при отображении f_F она переходит в регулярную сетку S_0 из равносторонних треугольников:

$$f_F(S) = S_0.$$

Для введения в множестве возможных сеток понятия “лучше” (“хуже”) нам нужно ввести в плоскости P метрику (неевклидово расстояние), зависящую от ферромагнетиков F . Обычное евклидово расстояние между точками x и y плоскости P_0 обозначим через $e(x,y)$.

Определение 2. Расстоянием, индуцированным полевой задачей Z_F , называется функция двух точек $R_F(x,y)$, равная евклидовому расстоянию их образов при отображении f_F :

$$R_F(x,y) = e(f_F(x), f_F(y)), \quad x, y \in P.$$

Напомним, что функция двух точек $R(x,y)$ определяет расстояние, если удовлетворяет следующим трем условиям:

- 1) $R(x,y) > 0$, если $x \neq y$;
- 2) $R(x,x) = 0$;
- 3) $R(x,y) + R(y,z) > R(x,z)$ (неравенство треугольника).

Теорема 2. Для каждой задачи Z_F функция R_F определяет расстояние на деформированной плоскости.

- 4) **Доказательство** следует из того, что евклидово расстояние удовлетворяет условиям 1 – 3. Например, для неравенства треугольника имеем

$$R(x,y) + R(y,z) = e(f_F(x), f_F(y)) + e(f_F(y), f_F(z)) \geq e(f_F(x), f_F(z)) = R(x,z).$$

Заметим, что в метрике расстояния R_F эквипотенциальные линии $L(F, A_k)$ суть концентрические окружности.

Следствие. Решение полевой задачи Z_F эквивалентно нахождению расстояния R_F .

Для данной сетки S и задачи Z_F обозначим

$$M = \max R_F(x,y), \quad m = \min R_F(x,y),$$

где максимум и минимум берутся по всем парам соседних узлов сетки S .

Определение 3. Индексом сетки S из треугольных элементов для данной полевой задачи Z_F называется число $(M - m)/M$.

Отметим, что расстояние R_F , а значит, и индекс сетки зависят от ферромагнитных факторов F , так что одна и та же сетка может иметь разный индекс для разных задач. Индекс показывает удаленность сетки от оптимальной: чем меньше индекс, тем “лучше”.

Следствие. Оптимальная сетка (и только она) всегда имеет нулевой индекс.

5. Композиция и декомпозиция сетки. С целью уменьшения индекса сетки предлагается менять количество узлов по ходу решения задачи. При этом желательно добавлять узлы так, чтобы два наиболее удаленных друг от друга соседних узла перестали бы быть соседними.

Определение 4. Алгоритм композиции сеточных узлов назовем оптимальным, если новый узел добавляется между двумя наиболее удаленными друг от друга (в метрике расстояния R_F) соседними узлами. Оптимальный алгоритм композиции сеточных узлов обязательно приводит к уменьшению индекса сетки.

Заметим, что для построения оптимального алгоритма композиции сеточных узлов не нужно знать все значения функции R_F (что эквивалентно решению всей полевой задачи), достаточно знать поведение функции расстояния лишь для пар близких точек. А для последних сложную функцию R_F можно аппроксимировать более простыми функциями, пренебрегая влиянием далеких факторов.

Неудачные алгоритмы автоматической композиции сеточных узлов приводят к деформации сетки и расходимости соответствующего процесса итераций численного решения полевой задачи. Следовательно, с помощью численных экспериментов можно судить, насколько удачна аппроксимация функции расстояния.

Мы предполагали в нижеописанных экспериментах, что функция расстояния для пар x, y близких точек зависит лишь от трех переменных: евклидова расстояния между ними $e(x, y)$, суммарной невязки ε в точках x и y , а также коэффициента k , зависящего от признака среды, оцениваемого эмпирическим путем:

$$R(x, y) = R(e, \varepsilon, k).$$

6. Численный эксперимент. Предложенный алгоритм динамической декомпозиции (последовательного улучшения) сетки реализован и апробирован на задаче численного определения магнитного поля в области, представленной на рис. 1.

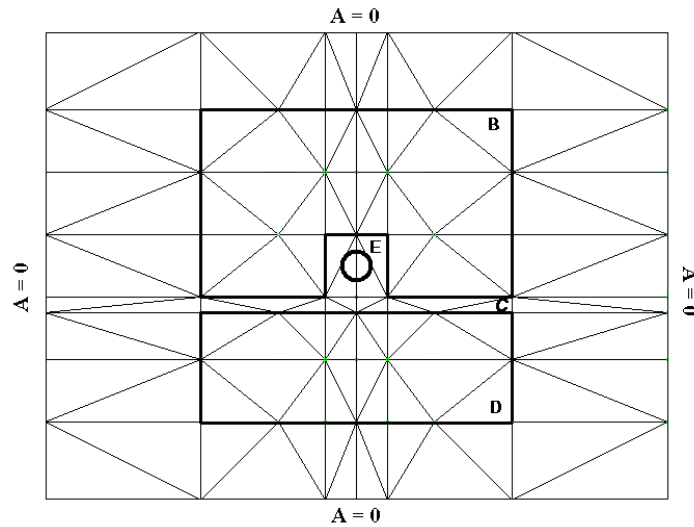


Рис. 1. Исследуемое электромагнитное устройство с заданными граничными условиями и начальной сеткой дискретизации

На рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками B и D, разделенными воздушным зазором C. Устройство содержит обмотку E, обтекаемую током. Для решения задачи рассмотрена конечная область, на границах которой приняты нулевые значения потенциалов ($A=0$).

Здесь же показана начальная весьма грубая сетка дискретизации, которая в ходе решения задачи подвергается динамической декомпозиции по предложенному алгоритму. Эффективность работы алгоритма в сильной степени зависит от выбора функции $R(x,y)$. В проведенном эксперименте в качестве функции $R(x,y)$ принято следующее выражение:

$$R(x,y) = k\varepsilon e^2.$$

Большое влияние на формирование оптимальной сетки оказывает выбор численного значения k . Так, в случае

$$k = \begin{cases} 1 & \text{в воздухе} \\ 2 & \text{в ферромагнетике,} \\ 1,5 & \text{на границе сред.} \end{cases}$$

в отмеченных кружками областях рис.2 образуются тупоугольные треугольники, что приводит к расходимости процесса решения задачи (рис.3).

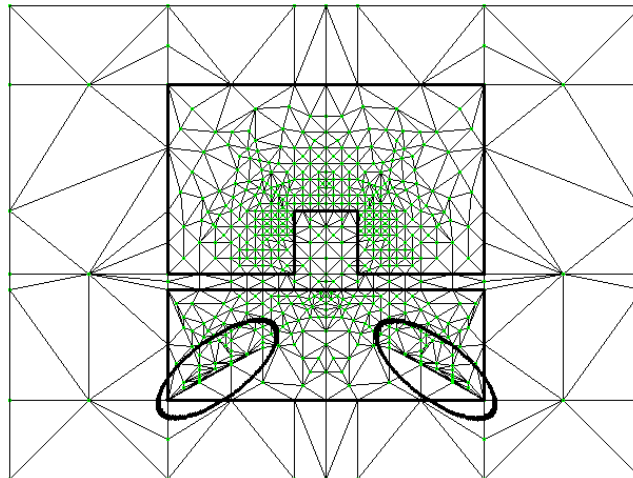


Рис. 2. Пример неудачного выбора коэффициента k

На рис.3 показано поведение максимальной невязки в зависимости от количества итераций.

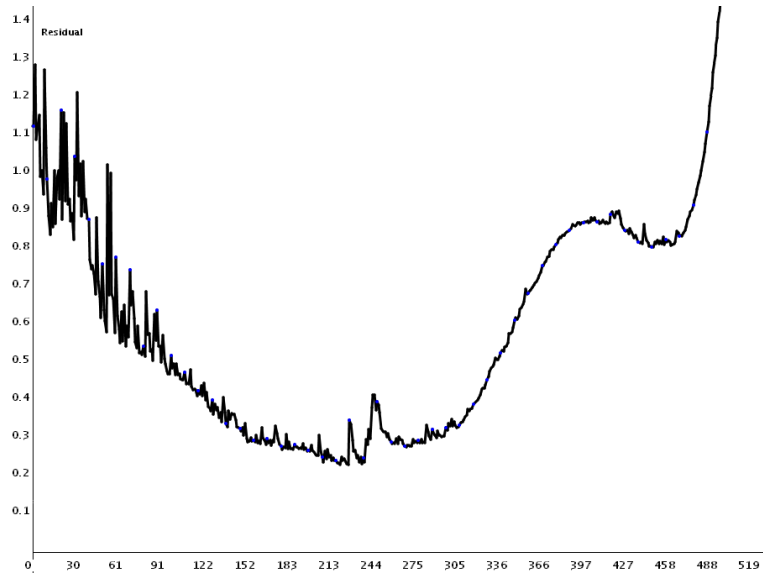


Рис. 3. Расхождение процесса решения при неудачном выборе коэффициента k

Наилучшая сетка (рис. 4) в эксперименте получена в случае

$$k = \begin{cases} 1 & \text{в воздухе,} \\ 2 & \text{в ферромагнетике,} \\ 4 & \text{на границе сред.} \end{cases}$$

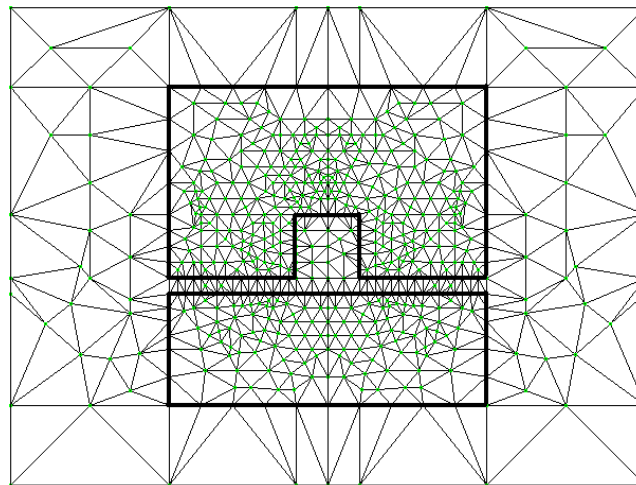


Рис. 4. Наилучшая сетка для данной задачи

На рис.5 показан процесс сходимости решения задачи с динамической декомпозицией сетки с данным значением k (кривая 1). На том же рисунке показан процесс сходимости решения (кривая 2) той же задачи с конечной (рис. 4) фиксированной сеткой.

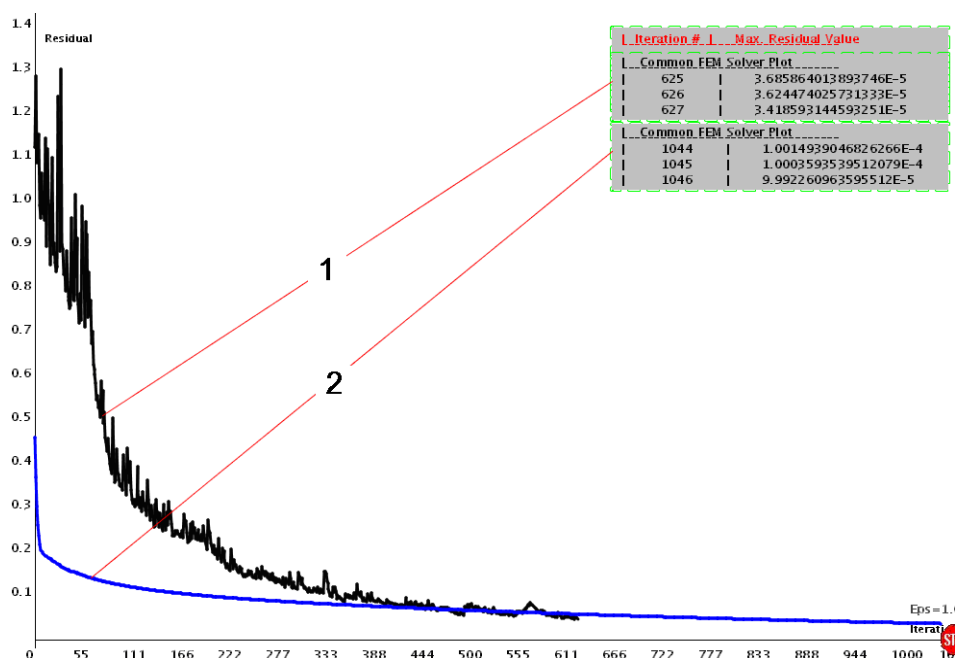


Рис. 5. Процесс сходимости решения задачи с динамической декомпозицией сетки с удачно выбранным значением коэффициента k

Как видно из рис.5, динамическая декомпозиция по предложенному алгоритму приводит к решению задачи за 627 итераций, а при фиксированной сетке задача решается за 1046 итераций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Иваненко С. А.** Адаптивные криволинейные сетки в методе конечных элементов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1995. – Т. 35, ¹ 11. – С. 1334–1355.
2. **Терзян А.А., Сукиасян Г.С., Пароникян А.Е.** О расчете магнитных полей методом конечных элементов с динамической композицией элементов дискретизации // Известия НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 2005. - Т. 58, N2. - С. 332-339.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 17.07.2005.

Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Ե. ՊԱՐՈՆԻԿՅԱՆ

**ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐՐԵՐԻ ՄԵԹՈԴՈՎ ՄԱԳՆԻՄԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՑԱՆՑԻ
ՕՊՏԻՄԱԼԱՑՄԱՆ ՄԱՍԻՆ**

Տրված է մագնիսական դաշտերի հաշվարկներում կիրառվող այնպիսի հասկացությունների, հստակ մաթեմատիկական ձևակերպում, ինչպիսիք են «օպտիմալ ցանցը» և «ցանցային հանգույցների կոմպոզիցիայի օպտիմալ ալգորիթմը»: Վերջավոր տարրերի մեթոդով էլեկտրամագնիսական դաշտային խնդիրների լուծման համար առաջարկված և իրականացված է օպտիմալ ցանցը ապրոքսիմացնող ընդհատավորման ցանցի ավտոմատ կառուցման մոտեցում:

H.A. TERZIAN, H.S. SUKIASYAN, A.E. PARONIKYAN

ON OPTIMIZATION OF THE FINITE-ELEMENT MESH FOR SOLUTION OF MAGNETIC FIELD PROBLEMS

A rigorous mathematical description is given to those well-known concepts in the area of computational investigation of magnetic fields, such as "optimal mesh" and "optimal algorithm of mesh point composition". For solution of magnetic field boundary-value problems by the finite-element method, an approach is proposed to automate the construction of the discretization mesh, which approximates the optimal mesh.