

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН, А.Е. ПАРОНИКЯН

## О РАСЧЕТЕ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ С ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПОЗИЦИЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Предложен и реализован подход к автоматическому построению сетки дискретизации для решения краевых задач методом конечных элементов. Данный подход основан на последовательной композиции (или декомпозиции) сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получающихся невязок в узлах сетки.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, метод конечных элементов, динамическая декомпозиция элементов дискретизации.

**1. Введение.** Исследование нелинейных и неоднородных магнитных полей со сложной геометрией связано с огромным объемом вычислений. С одной стороны, с увеличением числа элементов дискретизации возрастает точность приближения к непрерывной области исследования и, следовательно, точность решения краевой задачи, с другой - повышается порядок решаемой системы уравнений, что повышает трудоемкость вычислений.

Вместе с тем принятое на практике “ручное” построение дискретизационной сетки, основанное на предыдущем опыте и инженерной интуиции, ставит в определенной мере результат решения краевой задачи в зависимость от способности исследователя предугадать оптимальную для данной задачи сетку дискретизации. Таким образом, при “ручном” построении сетки дискретизации как результат решения, так и время решения задачи в определенной степени ставятся в зависимость от индивидуальных качеств исследователя.

Кроме того, чрезмерное возрастание количества сеточных узлов и усложнение геометрии исследуемой области делает затруднительным субъективное построение оптимальной сетки. При этом неудачно выбранная сетка не только может стать причиной замедления сходимости процесса последовательных приближений, но и вовсе привести к расходимости процесса. Все это делает особо актуальной проблему автоматического выбора сеточных узлов и построения оптимальной сетки.

В настоящей работе предложен подход к автоматическому построению сетки дискретизации для решения краевых задач методом конечных элементов, основанный на последовательной композиции (или декомпозиции) сеточных узлов и элементов в ходе решения краевой задачи в зависимости от поведения получающихся невязок. Метод апробирован реализацией

компьютерной программы автоматического построения оптимальной сетки для расчета плоских магнитных полей при помощи треугольных конечных элементов.

**2. Математическая формулировка задачи расчета магнитного поля.** Постоянное магнитное поле, созданное электрическим током, подчиняется уравнениям Максвелла:

$$\operatorname{rot} H = \delta, \quad H = \nu B, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad (1)$$

где  $H$  -- напряженность магнитного поля;  $\delta$  -- плотность тока;  $B$  -- магнитная индукция;  $\nu$  -- величина, обратная магнитной проницаемости.

Определим векторный магнитный потенциал  $A$ , который характеризуется следующими уравнениями:

$$B = \operatorname{rot} A, \quad \operatorname{div} A = 0.$$

Тогда (1) принимает вид

$$\operatorname{rot}(\nu \operatorname{rot} A) = \delta, \quad \operatorname{div} A = 0. \quad (2)$$

К дифференциальному уравнению (2) необходимо добавить краевое условие. Обычно это условие берется в виде задачи Дирихле -- края исследуемой области берутся достаточно далеко от токопроводящих подобластей, так что величину потенциала на краях можно принять равной нулю.

**3. Метод конечных элементов.** Краевые задачи со сложной геометрией обычно решаются методом конечных элементов. Суть этого метода заключается в том, что исследуемая область разделяется на подобласти (элементы) и внутри каждого элемента краевая задача заменяется вариационной, то есть дифференциальное уравнение с частными производными заменяется задачей минимизации некоторого функционала. В нашем случае дифференциальное уравнение (2) заменяется задачей минимизации энергетического функционала:

$$F(A) = \int (\int H dB) d\omega - \int \delta A d\omega,$$

где  $d\omega$  -- элемент объема.

Для удовлетворения краевого условия используется метод Ритца -- искомый потенциал внутри конечных элементов аппроксимируется системой линейно независимых базисных функций, одна из которых удовлетворяет краевому условию, а остальные обращаются в нуль на краю. В качестве базисных можно взять функции интерполяции  $a_i$ , которые в  $i$ -ом узле

принимают значение 1, а в остальных – 0. В результате для каждого некраевого узла  $j$  получается алгебраическое уравнение

$$\sum_e \left( v_e \sum_{i=1}^L A_i \beta_{ij}^e - \frac{\delta \Delta}{3} \right) = 0, \quad j=1,2,\dots,N, \quad (3)$$

где  $A_i$  - значение потенциала  $A$  в узле  $i$ ;  $v_e$  - значение  $v$  внутри элемента  $e$ ;  $\delta$  - значение  $\delta$  внутри элемента  $e$ ;  $\beta_{ij}$  - коэффициент взаимодействия вершин  $i$  и  $j$ ;  $N$  - число некраевых узлов.

В (3) внешнее суммирование осуществляется по всем элементам  $e$ , содержащим узел  $j$ , а внутреннее суммирование – по всем узлам  $i$ , содержащимся в элементе  $e$  ( $L$  - число таких узлов).

В случае сетки из плоских треугольных элементов коэффициент  $\beta_{ij}$  по вершинам  $i, j, m$  треугольника  $e$  имеет следующий вид (здесь  $L=3$ ):

$$\begin{cases} \beta_{ii}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)^2 + (x_j - x_m)^2], \\ \beta_{ij}^e = \frac{1}{4\Delta} [(y_j - y_m)(y_m - y_i) + (x_j - x_m)(x_m - x_i)], \end{cases} \quad (4)$$

где  $(x_i, y_i)$  - декартовы координаты узла  $i$ ;  $\Delta$  - площадь треугольника:

$$\Delta_n = \frac{(x_i - x_m)(y_j - y_m) - (y_i - y_m)(x_j - x_m)}{2}.$$

Заметим, что для каждого узла  $j$  в (3) принимают участие только непосредственные соседи узла  $j$ . Таким образом, получается система уравнений с неизвестными  $A_i$ , причем количество уравнений равно количеству неизвестных и количеству некраевых узлов.

**4. Автоматическое построение сетки.** Как построить оптимальную сетку, если меняется набор узлов дискретизации? При автоматическом построении сетки конечных элементов следует учитывать два условия:

а) внутри элемента физическая среда должна быть однородной, т.е. границы раздела сред должны быть границами раздела и элементов;

б) вершины элементов должны быть как можно ближе друг к другу, чтобы их участие в (3)-(4) в качестве “соседних узлов” было обоснованным. Математически условие “б” означает, что минимальный внутренний угол в отдельном элементе должен быть как можно больше (но он всегда меньше, чем  $(\pi/3)$ ).

Рассмотрим для наглядности случай сетки из плоских треугольных элементов. Триангуляция проводится в два этапа: вначале строится произвольная треугольная сетка (можно использовать классические мозаики Вороного и Делоне [1]), затем производится коррекция сетки для достижения условий "а" и "б".

Каждое ребро  $d$  сетки является стороной двух треугольников, составляющих вместе четырехугольник  $Q$ . Одна из диагоналей этого четырехугольника и есть  $d$ , обозначим через  $d'$  вторую диагональ. Четырехугольник  $Q$  делится на два треугольника диагональю  $d$  или  $d'$ . Выбор разделяющей диагонали производится с учетом условия "а". Если для обеих диагоналей выполняется условие "а", то проверяется условие "б". Перебирая по всем ребрам, получим оптимальную триангуляцию.

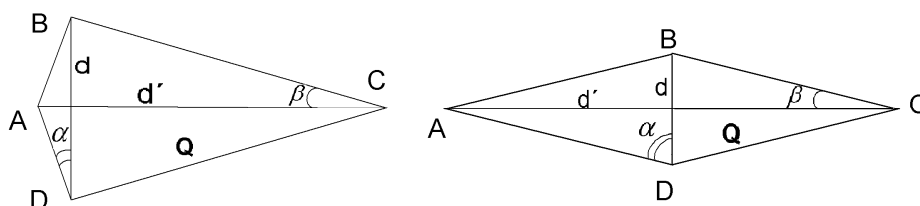


Рис. 1. Коррекция элементов сетки

Заметим, что длина диагонали имеет второстепенное значение. Например, на рис. 1 угол  $\alpha$  является минимальным для треугольника ABD, а угол  $\beta$  - минимальным для треугольника ABC. Слева  $\alpha < \beta$ , а справа  $\alpha > \beta$ , соответственно деление на треугольники производится слева - при помощи диагонали  $d' = AC$ , а справа - при помощи диагонали  $d = BD$ , хотя в обоих случаях имеем  $d < d'$ .

**5. Композиция и декомпозиция сетки.** В случае, когда исследуемая область неоднородна и состоит из подобластей с различными физическими и геометрическими свойствами, целесообразно, чтобы совокупность узлов дискретизации имела различную интенсивность (густоту) в разных подобластях. Чтобы добиться оптимального распределения густоты узлов, предлагается совокупность узлов не фиксировать, а по ходу решения задачи добавлять узлы (или же, наоборот, исключать).

В нелинейных полевых задачах основным источником погрешности является предположение, что внутри элемента магнитная проницаемость является постоянной. Поэтому имеет смысл добавлять узлы там, где:

- геометрические размеры элемента велики;
- сильно меняются значения магнитной проницаемости.

Критерием для выбора элемента, где будет добавлен узел, взято произведение

$$K = \max E S,$$

где  $E$  – значение невязки – разницы между значениями искомого потенциала в данной точке до итерации и после;  $S$  – площадь элемента. Первый множитель способствует тому, что узлы добавляются в местах, где велика невязка. Причем она велика там, где сильно меняются значения магнитной проницаемости. Второй множитель обеспечивает уменьшение геометрических размеров элементов.

После того как элемент для композиции выбран, надо выбрать место, где будет добавлен узел. Если узел добавить внутри элемента, то неминуемо образуются тупоугольные треугольники, что нежелательно (см. условие "б"). Предлагается узел добавлять в середине наибольшей стороны треугольника.

**Проблема зазора.** Если на рис. 1 сторона  $AC$  является границей раздела сред, то, согласно условию "а", деление на треугольники обязательно производится при помощи диагонали  $d'=AC$ , каким бы ни был угол  $\alpha$ . Чтобы этот угол в процессе композиции не стал бесконечно малым (такое происходит в узких воздушных зазорах), надо препятствовать появлению новых узлов, чересчур близко подходящих к границе раздела сред (на рис. 1 это узел  $B$ ). Это достигается добавлением весового коэффициента при вычислении длин сторон, являющихся границей раздела сред.

После каждого изменения множества узлов производится новое автоматическое построение сетки при помощи описанного алгоритма. Таким образом, осуществляется адаптация, перестраивающая сетку к особенностям решаемой задачи.

**6. Численный эксперимент.** Метод апробирован на задаче определения магнитного поля в области, представленной на рис. 2.

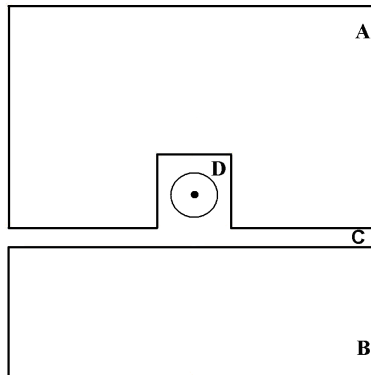


Рис. 2. Исследуемое электромагнитное устройство

На этом рисунке показано электромагнитное устройство с ферромагнитными участками  $A$  и  $B$ , разделенными воздушным зазором  $C$ . Устройство содержит обмотку  $D$ , обтекаемую током. Для определения поля в устройстве краевую задачу необходимо решить с нулевыми граничными условиями на бесконечности. Однако, учитывая, что поле вне устройства достаточно быстро затухает, можно ограничиться рассмотрением конечной

области [2] воздушного пространства, окружающего устройство, и принять на границе нулевые значения потенциалов (рис. 3).

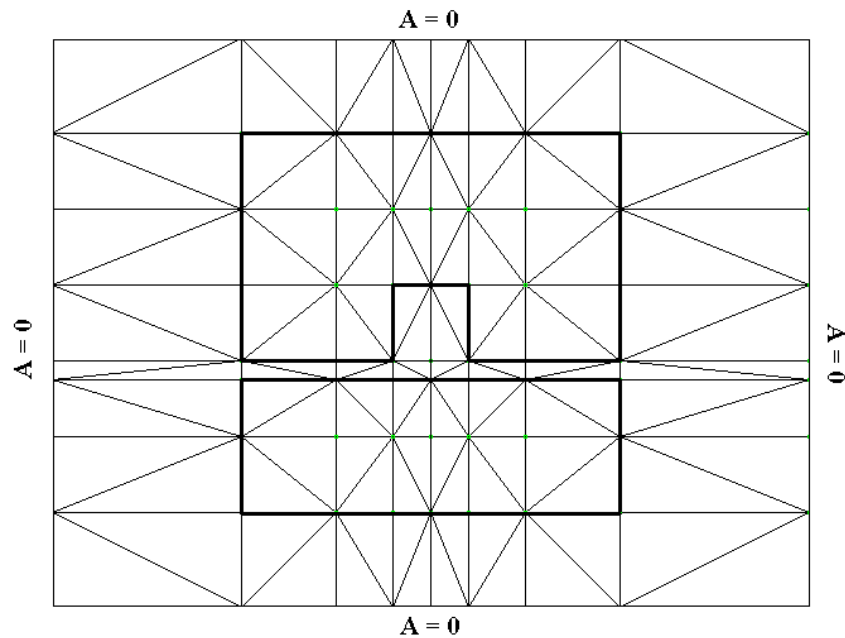


Рис 3. Задание граничных условий и начальной сетки дискретизации исследуемой области

Таким образом, для исследования магнитного поля в устройстве, представленном на рис. 2, формируется область (рис. 3) с начальной, весьма грубой сеткой дискретизации. Хотя начальное разбиение сетки может иметь произвольный характер, тем не менее оно подчинено некоторой логике, исходящей из предварительного представления о распределении магнитного поля. Как видно из рис. 3, сетка имеет большую плотность узлов вблизи токнесущей области, и с приближением к границам исследуемой области размеры конечных элементов возрастают.

С запуском разработанной программы осуществляется адаптация сетки по результатам расчета поля с одновременным определением качества сетки, основанным на анализе формы конечных элементов с целью недопущения образования острых углов (не менее 15...20°) между ребрами конечных элементов. Процесс динамической композиции завершается при достижении условия

$$Sl \leq \Delta$$

(где  $S$  – площадь, а  $\ell$  – периметр конечного элемента;  $\Delta$  -- заданный уровень останова), а итерации продолжаются до достижения заданной точности расчета поля.

На рис. 4 показана конечная сетка дискретизации исследуемой области, полученная в результате динамической композиции. В итоге осуществленной адаптации сетка из 49 начальных внутренних узлов преобразилась в сетку, состоящую из 204 внутренних узлов.

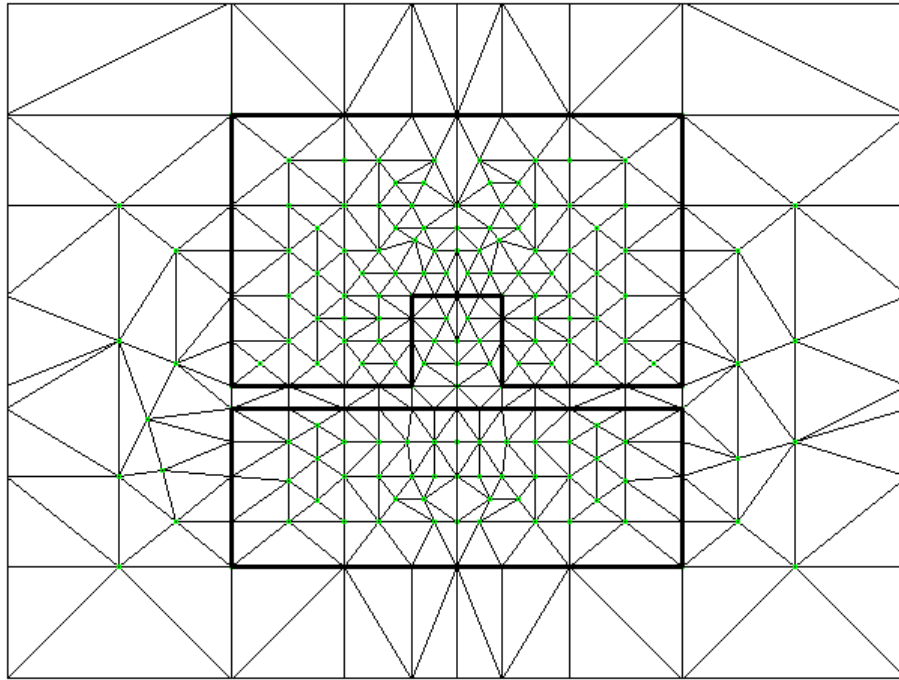


Рис. 4. Конечная сетка дискретизации исследуемой области, полученная в результате динамической композиции

На рис. 5 представлено полученное распределение магнитного поля в исследуемой области.

Для сопоставительного анализа проведены также расчеты магнитного поля с использованием постоянной конечной сетки дискретизации, представленной на рис. 4. Так, если при динамической композиции сетки краевая задача решена за 1377 итераций, то без использования адаптационных процедур та же задача решена за 1667 итераций (при той же точности решения  $\varepsilon = 10^{-4}$ ).

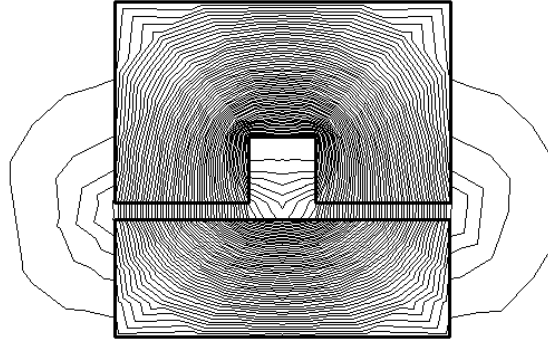


Рис. 5. Полученное распределение магнитного поля

**7. Заключение.** Полученные результаты свидетельствуют о эффективности рассмотренных адаптационных процедур при численном решении нелинейных краевых задач электромагнитного поля.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Ruppert J. A** Delaunay Refinement Algorithm for Quality 2-Dimensional Mesh Generation. NASA Ames Research Center, Submission to Journal of Algorithms, 1994.
2. **Терзян А. А.** Автоматизированное проектирование электрических машин.- М.: Энергоатомиздат, 1983.- 256 с.

ГИУА. Материал поступил в редакцию 19.03.2005.

**Հ.Ա. ԹԵՐԶՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Ե. ՊԱՐՈՆԻԿՅԱՆ  
ԸՆԴՀԱՏԱՎՈՐՄԱՆ ՑԱՆՑԻ ՏԱՐԲԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿ ԿՈՍՊՈԶԻՑԻՍՑՈՎ ՎԵՐՁԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐԻ  
ՄԵԹՈԴՈՎ ՍԱԳՆԻՄԱԿԱՆ ԴԱՇՏԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿԻ ՄԱՍԻՆ**

Առաջարկվել և իրականացվել է ընդհատավորման ցանցի ավտոմատ կառուցման մոտեցում վերջավոր տարրերի մեթոդով եզրային խնդիրների լուծման համար: Այն հիմնված է ցանցի հանգույցների և տարրերի հաջորդական կոմպոզիցիայի վրա եզրային խնդիրների լուծման ընթացքում՝ կախված ցանցի հանգույցներում ստացված անհամապատասխանությունների վարքից:

**H.A. TERZYAN, H.S. SUKIASYAN, A.E. PARONIKYAN  
ON CALCULATION OF MAGNETIC FIELDS BY FINITE-ELEMENT METHOD WITH DYNAMIC  
COMPOSITION OF DISCRETIZATION ELEMENTS**

An approach to automatic discretization mesh construction for boundary-value problem solving by the finite-element method is proposed. It is based on consequent composition (or decomposition) of mesh nodes while solving a boundary-value problem in terms of obtained residual behavior in mesh nodes.