

Г. А. МАКАРЯН

К ВОПРОСУ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ
 В НЕПРИЗМАТИЧЕСКОМ РУСЛЕ

Вопросы неплavnoизменяющегося движения в непризматическом русле в литературе освещены недостаточно. Известны работы Бернадского и Мелешенко о построении плана течения в открытых руслах [1]. Однако, из-за сложности полученных решений, они не нашли применения в инженерной практике.

Из системы уравнений Навье для общего случая неравномерного движения жидкости в открытых каналах Буссинеском получено следующее уравнение [2]:

$$i_0 - \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{dh}{dl} + \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) - \frac{1}{g} \iint_{\omega} \left\{ \left[\frac{\partial u'_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial y}{\partial \delta} + \frac{\partial u'_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial \delta} \right] d\delta \right\} \frac{d\omega}{\omega} \quad (1)$$

Здесь: δ — переменная в поперечном сечении;

$u_x, u_y, u_z, u'_x, u'_y, u'_z$ — проекции скорости и ускорения v^2 какой-либо точки жидкости с координатами x, y, z . При этом направления x и l для целого потока совпадают (рис. 1).

Базируясь на приведенное общее уравнение (1) в статье делается попытка установить для рассматриваемого случая уравнение, от-

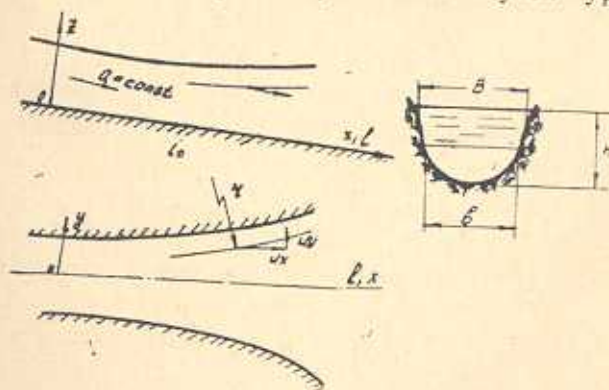


Рис. 1. Схема неравномерного движения жидкости в непризматическом русле с произвольной формой поперечного сечения.

ражающее основные особенности неплавноизменяющегося движения в непризматическом русле. С целью преобразования подинтегрального выражения уравнения (1) и установления значения поперечной составляющей ускорения u'_y предполагается, что:

1. В вертикальных плоскостях исследуемого потока движение носит плавноизменяющийся характер ($u'_z = 0$), в то время, когда ширина потока изменяется настолько заметно, что поперечное ускорение u'_y играет значительную роль.

2. Ширина поперечного сечения изменяется таким образом, что отношение местной продольной скорости к средней скорости по сечению не изменяется по времени (условие подобия эпюр продольных скоростей), т. е.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{u_x}{v} \right) = 0. \quad (2)$$

3. Первый член подинтегрального выражения уравнения (1) не зависит от изменения глубины потока, и при его преобразовании следует принять $h = h_0 = \text{const}$.

Далее, используя уравнение неразрывности среды,

$$\frac{\partial}{\partial l} u_x + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

а также, уравнение непрерывности для целого потока,

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial l} + \frac{1}{b} \frac{\partial b}{\partial l} = 0 \quad (\text{так как } Q = v \cdot b \cdot h_0 = \text{const}) \quad (4)$$

не трудно показать, что условие (2) сводится к следующему выражению для поперечной составляющей скорости: $u_y = u_x \frac{y}{b} \frac{\partial b}{\partial l}$. Тогда, учитывая (3) и пренебрегая членами порядка $\left(\frac{\partial b}{\partial l} \right)^2$ получим

$$u'_y = u_x^2 \frac{y}{b} \frac{\partial^2 b}{\partial l^2}. \quad (5)$$

К этому ускорению надо добавить еще центробежное ускорение, возникающее от криволинейности струи потока, тогда полное ускорение будет иметь вид:

$$u'_y = u_x^2 \frac{\partial^2 b}{\partial l^2} \left(1 + \frac{y}{b} \right). \quad (6)$$

Согласно оговоренным допущениям последний член уравнения (1)

приводится к виду: $\frac{1}{2g} \int_{-b/2}^{+b/2} \left| \frac{\partial u'_y}{\partial l} \right| dy \frac{dy}{y}$. Подставляя в это выражение

значение u'_y из (6) в силу принятых выше допущений получим:

$$i_0 = \frac{v^2}{C^2 R} = \frac{dh}{dl} + \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha v}{2g} \right) - \frac{9}{4} \frac{\alpha_i v^2}{2g} \cdot b \frac{d^2 b}{dl^2} \quad (7)$$

Здесь коэффициент α является поправкой к значению количества движения секундной массы, вычисленной по средней скорости:

$$\alpha_1 = \frac{\int_0^y u_x^2 dy}{v^2 y}.$$

Уравнение (7) в достаточной для практики мере характеризует неплavnoизменяющееся движение жидкости в непризматических руслах, так как при его выводе учтены центробежное и полное поперечное ускорение и возможное расхождение струи потока.

Следовательно, оно отличается от принятой в настоящее время „модели“ плавной изменяемости потока своей общностью [3]. Подставив значение средней скорости в (7) можно свести последнее к нелинейному диф. уравнению третьего порядка, относительно b , решение которого, однако, связано с большими трудностями.

Прежде чем перейти к анализу уравнения (7), остановимся на его физической сущности. Каждое движение происходит согласно основному закону механики, суть которого заключается в том, что сумма изменений вдоль пути полной энергии и потерь на сопротивление равна нулю. Если полагать, что изменение удельной кинетической энергии потока полностью характеризуется выражением $\frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right)$, а удельная потенциальная энергия выражением $\frac{dh}{dl} - i_0$, тогда согласно уравнению (7) изменение удельной энергии сопротивления примет вид

$$\frac{v^2}{C^2 R} - \frac{9}{4} \frac{\alpha_1 v^2}{2g} b \frac{d^3 b}{dl^3}.$$

В существующем уравнении плавноизменяющегося движения допущено, что потери удельной энергии на сопротивление в единицу длины происходят по закону равномерного движения, выраженного первым членом, но в тех случаях, когда движение неплavnoизменяющееся становится необходимым учесть потери энергии еще вторым членом, выражающим сопротивление на деформацию потока по его ширине.

С учетом физической картины движения жидкости в непризматическом русле криволинейного очертания (но неискривленного) представляется возможным несколько изменить структуру последнего члена уравнения, преднамеренно идя на некоторое отступление в точности учета величины потерь энергии сопротивления на деформацию потока (равьше она вообще не учитывалась), и представить в виде

$$\frac{9}{4} \frac{\alpha_1 v^2}{2g} \cdot b \frac{d^3 b}{dl^3} = \beta \cdot \frac{h}{B} \frac{db}{dl}, \quad (8)$$

где β следует определить из опытов для компенсации всяких неточностей, в том числе и от приближенного интегрирования. При интегрировании β принимается постоянным.

Для частного случая прямоугольного русла и при постоянной глубине потока, когда

$$v = \frac{Q}{b \cdot h}; B = b; \frac{9a_1}{8gh^2} = c_0$$

будем иметь:

$$c_0 \frac{d^2 b}{dl^2} = \beta \frac{db}{dl}, \quad (8')$$

откуда следует, что принятым допущением лишь понижается порядок дополнительного члена уравнения (7) без его линеаризации [5, 6].

Сделанное допущение можно рассматривать как частный способ подхода к решению уравнения (7), когда в первом приближении полагается существование функции, удовлетворяющей условию

$$\beta = c_0 \frac{b'''}{b'} = \text{const},$$

а в дальнейшем уточняется ее значение уравнением (9).

Этому условию может удовлетворить, например, любая показательная зависимость.

Следует однако отметить, что кривые очертаний непризматических русел [8] по их внешней форме сходны с кривыми показательных функций.

Следует также иметь в виду, что количество граничных условий в случае применения приведенной замены, уменьшается, так как этим автоматически закладывается в ур. (7) два граничных условия. Сказанное можно обосновать следующим образом. Положим, что $c_0 \frac{d^2 b}{dl^2} = f_1$; а $\beta \frac{db}{dl} = f_2$. Соответствующие их интегралы будут:

$$c_0 b = \int \int (f_1 dl + c_1) dl + c_2 l + c_3 \text{ и } \beta \cdot b = \int f_2 dl + c_1.$$

Согласно рассматриваемому условию (8') $f_1 = f_2$, тогда можно записать:

$$c_0 b = \int \int [\rho^2 dl] dl + c_2 l + c_3.$$

Отсюда следует, что введением условия (8) $f_1 = f_2$ фактически уже используются граничные условия c_2 и c_3 и задача остается корректной.

Согласно (8) уравнение (7), для случая русла с неизменным по длине коэффициентом формы сечения, приводится к квадратуре

$$\frac{db}{dl} = \frac{Q^2/C^2 \omega^2 R - i_0 + (1 - n_k) dh/dl}{(\beta + n_k) h/B}, \quad (9)$$

которое при $\beta = 0$ превращается в уравнение плавноизменяющегося движения [4].

Полученное уравнение отражает самые разнообразные случаи неравномерного движения; позволяет провести глубокий анализ и установить формы кривых очертаний русел в зависимости от энергетического состояния потока и т. д. Не имея возможности провести ши-

рокий анализ уравнения (9) [7], ограничимся, лишь, рассмотрением движения с постоянной удельной энергией сечения: $\mathcal{E} = h + \frac{\alpha v^2}{2g} = \text{const.}$

Тогда с учетом (8) из уравнения (7) следует, что

$$\beta \frac{dh}{dl} = \frac{B}{h} \left(\frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} - i_0 \right).$$

Следовательно, движение с $\mathcal{E} = \text{const}$ может иметь место не только при равномерном движении в призматическом русле, как вытекает из уравнения плавноизменяющегося движения, но также при равномерном движении в непризматическом русле. При интегрировании уравнения (9) следует задаваться законом изменения глубины потока. Виды очертаний при этом не зависят от $\frac{dh}{dl}$ [8]. Надо полагать, что из всех

возможных задаваемых законов изменения глубины вдоль непризматического потока чаще всего на практике будет встречаться прямолинейный закон $\frac{dh}{dl} = \text{const}$; ибо если в двух сечениях русла имеются

две совершенно определенные глубины, проектировщику нет необходимости искать поверхность перехода от глубины h_1 к глубине h_2 в виде криволинейной свободной поверхности (см. пунктирные линии m и n на рис. 2). Поэтому достаточно иметь интеграл уравнения (9) только при $\frac{dh}{dl} = \text{const}$. Из этого



Рис. 2. Схема соединения конечных глубин на переходном участке.

следует, что значение коэф. β не должно изменяться с изменением глубины потока и не зависит от наклона его свободной поверхности. По этому для экспериментального определения коэф. β удобнее пользоваться решением уравнения (9) в случае $\frac{dh}{dl} = 0$. Интегрирование этого случая при $\beta = 0$ приведено в работе [8]. В данном случае ($\beta \neq 0$) решение будет иметь вид:

$$l_{1-2} = 1,151 \frac{h_0}{i_k} \lg \frac{B^2}{\left(B^2 - \frac{i_k'}{i_0 \cdot a} \right)^{1 + \frac{\beta i_k'}{i_0}}} \Bigg|_{B_1}^{B_2}, \quad (11)$$

где $B = b + 2mh$.

Метод определения β излагается ниже:

1. По уравнению (11) для двух случаев $\beta = 1$ и $\beta = 0$ определяем соответственно, кривые очертаний русел при $\frac{dh}{dl} = 0$: а) $b = f(l)_{\beta=1}$ и б) $b = f(l)_{\beta=0}$.

2. Для определенного расхода воды рассчитывается и строится на модели по кривым очертаний $b = f(l)_{\beta=1}$ и $b = f(l)_{\beta=0}$ переходный участок (например, суживающийся быстроек), соединяющий подводящий и отводящий равномерные потоки.

3. На стенках модели со стороны потока проводится черной краской прямая линия постоянных глубин параллельно ко дну канала (так как при расчете была принята $h_0 = \text{const}$).

4. Далее пропускается расчетный расход воды, контролируемый специальным расходомером.

5. Проверяется положение следов свободной поверхности потока на стенках. Если след совпадает с заранее проведенной линией расчетных глубин, то теория верна (вывод уравнения (9), а также и его интегрирование достаточно точны). В обратном случае, сдвигая и отодвигая стенки, варьируется очертание при наличии потока воды с тем, чтобы свободная поверхность совпадала с линией постоянных глубин. Таким образом, экспериментально находится положение действительного очертания стенок на плоскости дна потока.

В гидравлической лаборатории МИИВХ им. В. Р. Вильямса в изложенном порядке было проведено экспериментальное исследование бурного и спокойного потоков.

Опыты на быстротоке показали, что при очертаниях стенок с $\beta = 0$, что соответствует диф. уравнению плавноизменяющегося движения, переменная ширина потока получила заниженные значения вследствие чего по всей длине быстрогока и подводящего канала глубина потока стала больше расчетной и образовалась кривая подпора в подводящем канале.

Это стало заметно, поскольку нами за постоянную расчетную глубину в быстротоке принималась глубина равномерного подводящего потока, тогда как другие исследователи обычно берут критическую глубину, при которой излишнее сужение быстрогока может и не влиять на подводящий поток и не позволяет обнаружить ошибку, тем самым не была выявлена непригодность уравнений плавноизменяющегося движения для непризматических русел. В случае очертаний быстрогока при $\beta = 1$ получилось наоборот — он стал шире чем потребовалось бы для действительного потока и свободная поверхность лежала несколько ниже черной линии постоянных глубин, что почти не сказывалось в подводящем канале. Совпадение расчетных и действительных глубин стало возможным при установленном опытом очертании (рис. 3).

На рис. 4 представлен вид потока сверху с тремя парами стенок быстрогока. По фактическим замерам на рис. 3 построены кривые очертания (при $\beta = 0$), II (при $\beta = 1$) и III (при β) с соответствующими линиями свободных поверхностей I'-II'-III'. Там заметен значительный сдвиг кривых I и I' относительно остальных кривых, из чего следует, что кривая II и (II') располагается ближе к действительным кривым, чем I и (I'), кроме того, кривая III (а также III') фактического потока

находится между кривыми с $\beta = 0$ и $\beta = 1$, следовательно, как предполагалось раньше, $0 < \beta < 1$. Определение числового значения β сводится к вычислению следующего отношения (рис. 4):

$$\beta = \frac{b_{\beta} - b_{\beta=0}}{b_{\beta=1} - b_{\beta=0}} \quad (12)$$

где $b_{\beta=0}$ — ширина потока по дну какого-нибудь сечения при кривых очертаний с $\beta = 0$;

$b_{\beta=1}$ — то же при очертании с $\beta = 1$;

b_{β} — ширина потока при кривых очертаний, установленных опытным путем.

Вычисление β по опытным данным согласно (12) показывает, что

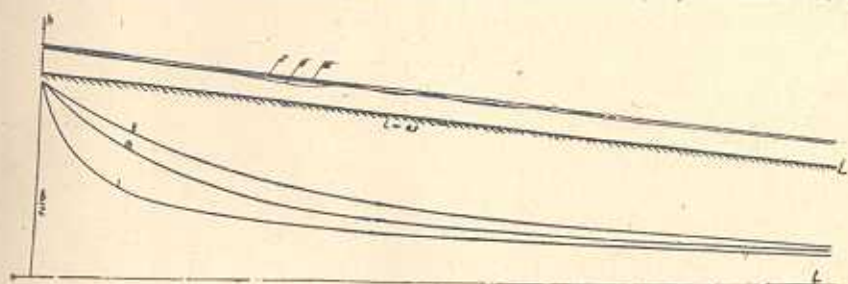


Рис. 3. Кривые очертания потока на модели быстротока и соответствующие кривые свободных поверхностей.

его значение изменяется по длине бурного потока незначительно и при интегрировании можно принимать его постоянным, равным в среднем, 0,65. Проверочные расчеты других очертаний с учетом $\beta = 0,65$ по формуле (11) показали хорошее совпадение с опытным очертанием.

Исследование спокойных потоков по описанному методу показало, что при таком состоянии потоки несколько лучше подчиняются „модели“ плавной изменяемости, чем бурные: для них $\beta = 0,3$. Формы очертания стенок, построенных при $\beta = 0,3$ и $h = \text{const}$, подтверждается хорошим соответствием действительной линии свободной поверхности потока с проведенной линией постоянных глубин. Отклонение составляло менее 0,5%. Повторные опыты, проведенные на модели быстротока при разных расходах, подтвердили, что форма очертания русла и β практически не зависят от расхода, что и следовало ожидать.

В работе [8] приведен способ приближенного интегрирования уравнения (9) с помощью вспомогательной степенной функции, содержащей, так называемый, гидравлический показатель ширины русла

$$x = -\frac{b}{\Pi_h} \frac{\partial \Pi_h}{\partial b} - \frac{b}{a_v} \frac{\partial a_v}{\partial b} \quad (13)$$

где a_v в данном случае, согласно (7) и (8), будет иметь вид

$$a_v = \frac{d}{dl} \left(\frac{\alpha v^2}{2g} \right) = i_0 - \frac{Q^2}{\omega^2 C^2 R} + \beta \frac{h}{B} \frac{db}{dl} - \frac{db}{dl} \quad (14)$$

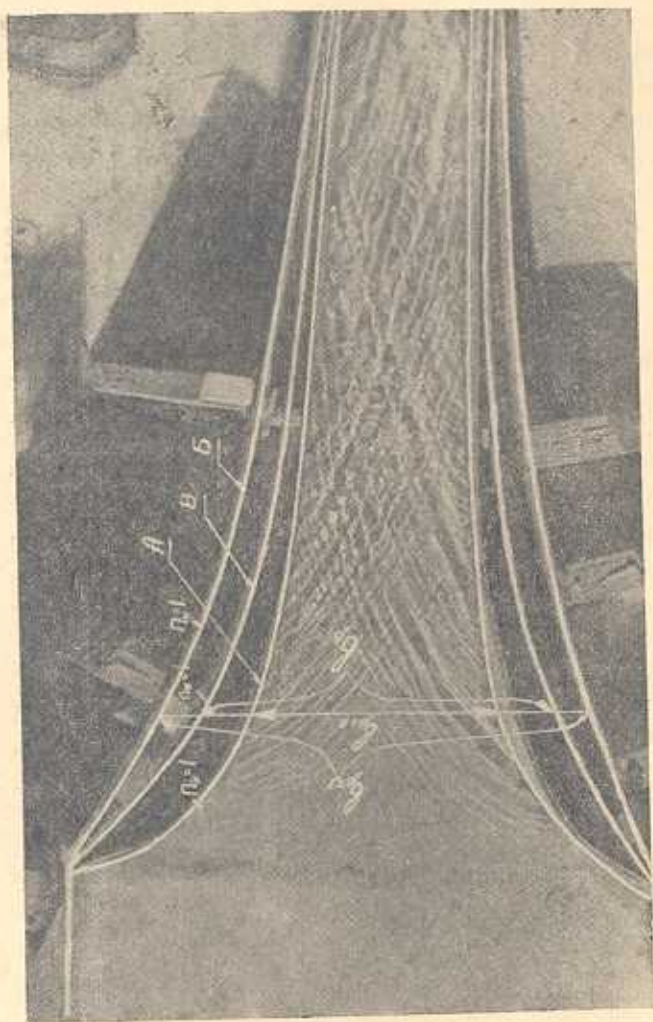


Рис. 4. Движение воды в быстроходе (вид сверху). А. Очертание стенок при $\beta = 0$. Б. то же при $\beta = 1$. В. то же при $\beta = 0,65$ (по опытам).

Подставляя в (14) $\frac{db}{dl}$ из (9) и определяя производную a_v (пренебрегая при этом изменением по ширине удельных потерь: $\frac{\partial}{\partial b} \left(\frac{a^2}{\omega^2 C^2 R^2} \right) = 0$) вместо (13) получим

$$x = \frac{\Pi_k}{\beta + \Pi_k} x_{\text{пл.}}, \quad (15)$$

где $x_{\text{пл.}} = -\frac{b}{\Pi_k} \frac{\partial \Pi}{\partial b}$ — гидравлический показатель ширины при плавно-изменяющемся потоке. Для трапециoidalного русла

$$x_{\text{пл.}} = \frac{3}{1 + mh/b} + \frac{1}{1 + 2mh/b}$$

и колеблется около двойки. При этом, как показывают исследования, x колеблется в окрестностях единицы. Из (15) становится возможным ограничить неплавноизменяющееся движение от плавного движения в непризматическом русле. С этой целью определим значения x_1 и x_2 соответствующие предельно неплавно и предельно плавноизменяющимся движениям. Их среднее-арифметическая величина будет характеризовать границу указанных потоков. Самая развитая неплавноизменяемость имеет место в сечении с $\Pi_k = 1$. Тогда

$$x_1 = x_{\text{пр. непл.}} = x_{\text{пл.}} \frac{1}{1 + \beta}$$

Предельно плавноизменяющееся движение определяется условием $\Pi_k \rightarrow \infty$ для бурного потока и условием $\Pi_k \ll 1$ для спокойного β потока. В связи со сказанным для бурного потока $x_2 = x_{\text{пл.}}$

$$x_{\text{гр.}} = 0,5 (x_1 + x_2) = \frac{\beta + 2}{\beta + 1} \cdot \frac{x_{\text{пл.}}}{2}$$

Подставляя последнее в выражение (15) получим окончательно для первого граничного сечения между участками бурных потоков с плавно и неплавноизменяющимися струями:

$$\Pi_k'_{\text{гр.}} = 2 + \beta.$$

В случае спокойного потока предельно плавное движение будет иметь место, практически, при $\Pi_k < 0,1 \div 0,05$ и $x_2' = \frac{0,05}{\beta_{\text{сп.}} + 0,05}$. Повторяя

вышеприведенный расчет с заменой x_2' вместо x_2 можно определить вторую границу неплавноизменяющегося участка потока $\Pi_k'_{\text{гр.}} \div 1,1 \beta_{\text{сп.}}$.

Таким образом, в области $1,1 \beta_{\text{сп.}} < \Pi_k < 2 + \beta_{\text{бур.}}$ движение является неплавноизменяющимся. Приведенные выше значения $\beta_{\text{бур.}} = 0,65$, $\beta_{\text{сп.}} = 0,3$ подлежат уточнению. Вне указанной области для Π_k движение может считаться плавноизменяющимся и охарактеризоваться существующими уравнениями.

Գ. Ա. ՄԱԿԱՐՅԱՆ

ՈՉ ՊՐԻՋՄԱՅԱԿԱՆ ՀՈՒՆԵՐՈՒՄ ՀԵՂՈՒԿՆԵՐԻ ԿԱՅՈՒՆԱՅԱՄ
ՇԱՐՃՄԱՆ ՀԱՐՑԻ ՇՈՒՐՋԸ

Ա մ ֆ ո ւ ֆ ու մ

Հողվածում դուրս է բերված հեղուկների անհավասարաչափ ոչ սահուն փոփոխող շարժման դիֆերենցիալ հավասարումը՝ առանց սահմանափակելու այն սահուն փոփոխականության «մոդելով», որով և պայմանավորված է «ոչ սահուն-փոփոխող շարժում» անբովիչը: Սակայն ստացված դիֆերենցիալ հավասարումը լինելով 3-րդ կարգի ոչ գծային հավասարում՝ հունի փոփոխական լայնության՝ b -ի նկատմամբ, ժամանակակից մեթոդներով լուծման ենթակա չէ: Այդ իսկ պատճառով հեղինակի կողմից կատարված է (7) հավասարման 3-րդ կարգի ածանցյալ պարունակող անդամի փոխարինում 1-ին կարգի ածանցյալ ու նպաստահոսարմար ստրուկտուրա ունեցող և փորձնական գործակից պարունակող անդամով՝ $\beta \frac{h}{B} \frac{db}{dl}$: Վերջինս ապահովում է նախ, ստացված դիֆերենցիալ հավասարման ինտեգրման համար հարժար տեսքի բերելը db -ի նկատմամբ, և երկրորդ, հնարավորություն է ստեղծում փորձնական ճանաչարձով որոշվող β գործակիցի օգնությամբ չեզոքացնելու նշված հավասարմանը նախորդող ձևափոխությունների, վերոհիշյալ փոխարինման և հետագա ժամանակ ահիլ տրվող անճշտությունները:

Հողվածում բերվում են նաև β գործակիցի փորձնական որոշման մեթոդիկան և փորձերի արդյունքներից ստացված նրա թվային միջինացված արժեքները բուսն և հանդարտ շարժումների համար:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Бернадский Н. М. Теория турбулентного потока и ее применение к построению плана течения в открытых водоемах. Материалы по гидрологии, гидрометрии и водным силам. Теплоэлектропроект, 1933.
2. Бобылев Д. К. Очерк теории водяных течений, выработанной Буссинеском. Петербург, 1889.
3. Бахметьев А. А. О неравномерном движении жидкости в открытом русле. Ленинград, 1928.
4. Агроскин Н. И., Пакалов Ф. И., Дмитриев Г. Т. Гидравлика. 1954.
5. Сухомел Г. А. Вопросы гидравлики открытых русел и сооружений. Киев, 1949.
6. Назарян А. Г. Уравнение свободной поверхности открытого потока при искривлении струй в вертикальной плоскости. Изв. АН Армянской ССР, № 1, 1953.
7. Макарян Г. А. Установившееся неплавноизменяющееся движение жидкости в не-призматическом русле (диссертация, МИИВХ, М.), 1958.
8. Макарян Г. А. Установившееся плавноизменяющееся движение жидкости в не-призматическом русле. Известия АН Армянской ССР, (серия ТН) № 2, 1958.