

А.А. СААКЯН

ВЛИЯНИЕ МЕСТА РАСПОЛОЖЕНИЯ ОПОРЫ НА ВЕЛИЧИНУ КРИТИЧЕСКОЙ НАГРУЗКИ СЖАТОГО СТЕРЖНЯ

Рассматривается задача устойчивости прямолинейного стержня, закрепленного на одном конце и сжимаемого на другом конце центральной осевой нагрузкой, при наличии дополнительной опоры. Рассмотрены три случая закрепления конца стержня: шарнирное, жесткое и скользящее, а также случаи как консервативной силы, так и следящей силы. Получены зависимости критической сжимающей нагрузки от места расположения дополнительной опоры.

Ключевые слова: стержень, устойчивость, промежуточная опора, консервативная сила, следящая сила.

Введение. Задача устойчивости центрально-сжатого упругого стержня была сформулирована и решена еще в XVIII веке Л. Эйлером. Однако до настоящего времени интерес к этой, кажется, простой задаче не ослабевает ввиду широкой ее распространенности как в инженерных конструкциях, так и в природе [1-5]. Задачи оптимизации устойчивости сжатого упругого стержня по критерию минимального веса исследованы достаточно полно [6]. Из исследований, относящихся к задачам оптимизации на основе определения места расположения опоры, можно указать работы [7,8]. В [9] решена задача устойчивости закрепленного по концам двухкомпонентного составного стержня под действием осевой сосредоточенной силы, приложенной в точке раздела материалов, и выявлена зависимость величины критической силы от отношения изгибных жесткостей составных частей стержня.

В настоящей работе проводится исследование характера изменения величины критической нагрузки в зависимости от места расположения опоры. Установлено, что задача не имеет оптимального решения.

Постановка задачи. Пусть стержень постоянного поперечного сечения, закрепленный на одном конце, сжат силой P . Предполагается возможность установки точечной опоры, ограничивающей поперечное смещение стержня в этой точке (рис. 1).



Рис.1. Схематическое представление задачи

При заданной длине стержня l требуется определить место расположения опоры, т.е. найти множитель $0 < \delta < 1$, при котором критическая нагрузка, приводящая к потере устойчивости, будет наибольшей.

Уравнение устойчивости для каждой из частей стержня имеет вид [10]

$$\frac{d^4 w_i}{dx^4} + \alpha^2 \frac{d^2 w_i}{dx^2} = 0 \quad (i=1,2), \quad \alpha^2 = \frac{P}{EJ}, \quad (1)$$

где w_1 – поперечное перемещение (прогиб) на отрезке $0 \leq x \leq \delta l$, а w_2 – то же, на отрезке $\delta l \leq x \leq l$; P – сжимающая нагрузка; E – модуль упругости материала стержня; J – момент инерции поперечного сечения относительно оси Ox .

Предполагается, что на опоре, т.е. в точке раздела $x = \delta l$ частей стержня, выполняются условия равенства нулю прогиба с обеих сторон, а также условия равенства между собой углов поворота и изгибающих моментов:

$$w_1 = 0, \quad w_2 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = \frac{dw_2}{dx}, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = \frac{d^2 w_2}{dx^2} \quad (x = \delta l). \quad (2)$$

Общее решение уравнения (1), очевидно, имеет вид

$$w_i = A_i + B_i x + C_i \sin \alpha x + D_i \cos \alpha x \quad (i=1,2).$$

Шарнирное закрепление. Удовлетворяя условиям шарнирного закрепления конца $x = 0$:

$$w_1 = 0, \quad \frac{d^2 w_1}{dx^2} = 0 \quad (x = 0)$$

и условиям непрерывности (2), будем иметь

$$w_1 = C_1 \left(\sin \alpha x - \frac{x}{\delta l} \sin \alpha \delta l \right), \quad (3)$$

$$w_2 = \frac{(C_1 - C_2)}{\cos \alpha \delta l} [\sin \alpha \delta l \cos \alpha x - \alpha \delta l + \alpha x] - \frac{x}{\delta l} C_1 \sin \alpha \delta l + C_2 \sin \alpha x.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 подлежат определению из граничных условий на конце $x = l$. Поскольку этот конец свободен относительно перемещений и подвержен действию лишь осевой нагрузки, то имеем условия на изгибающий момент и перерезывающую силу:

$$\frac{d^2 w_2}{dx^2} = 0; \quad \frac{d^3 w_2}{dx^3} + \kappa \frac{dw_2}{dx} = 0 \quad (x = l). \quad (4)$$

При $\kappa = \alpha^2$ будем иметь случай консервативной нагрузки, а при $\kappa = 0$ - случай следящей нагрузки.

Подставляя второе из представлений (3) в условия (4), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l C_1 - (\operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l - \sin \alpha l) C_2 = 0, \\ & C_1 \left\{ (\alpha^2 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l + \kappa \left[\frac{1}{\cos \alpha \delta l} - \frac{\sin \alpha \delta l}{\alpha \delta l} \right] \right\} + \\ & + C_2 \left\{ -(\alpha^2 - \kappa) (\operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l + \cos \alpha l) - \frac{\kappa}{\cos \alpha \delta l} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Приравняв детерминант матрицы системы (5) к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение для определения критической нагрузки, приводящей к потере устойчивости, в зависимости от места расположения опоры:

$$-(\alpha^2 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha \delta l + \kappa \frac{\sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l - \alpha \delta l \sin \alpha l}{\alpha \delta l \cos \alpha \delta l} = 0. \quad (6)$$

В случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) уравнение (6) примет вид

$$\alpha \delta l \sin \alpha l - \sin \alpha \delta l \sin \alpha (1 - \delta) l = 0, \quad (7)$$

а в случае следящей нагрузки ($\kappa = 0$):

$$\operatorname{tg} \alpha \delta l = 0. \quad (8)$$

Жесткое защемление. Удовлетворяя условиям жесткого защемления конца $x=0$:

$$w_1 = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x=0) \quad (9)$$

и условиям непрерывности (2), будем иметь

$$\begin{aligned} w_1 &= C_1 \left[(\alpha \delta l - \sin \alpha \delta l) \frac{1 - \cos \alpha x}{1 - \cos \alpha \delta l} - \alpha x + \sin \alpha x \right], \\ w_2 &= C_2 \left\{ \frac{\alpha (\delta l - \alpha x)}{\cos \alpha \delta l} + \sin \alpha x - \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha x \right\} + \\ &+ C_1 \left\{ -\frac{\alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} + \frac{(\alpha \delta l - \sin \alpha \delta l)}{1 - \cos \alpha \delta l} + \alpha x \frac{1 - \cos \alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{tg} \alpha \delta l \frac{(1 - \alpha \delta l \operatorname{ctg} \alpha \delta l)}{1 - \cos \alpha \delta l} \cos \alpha x \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Удовлетворяя вторым из представлений (10) условиям (4), получим однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$C_1 \frac{(\alpha\delta l - \operatorname{tg} \alpha\delta l)}{1 - \cos \alpha\delta l} \cos \alpha l + C_2 (-\sin \alpha l + \operatorname{tg} \alpha\delta l \cos \alpha l) = 0,$$

$$C_1 \left\{ \alpha\kappa \frac{1 - \cos \alpha\delta l}{\cos \alpha\delta l} + \alpha(\kappa - \alpha^2) \frac{\alpha\delta l - \operatorname{tg} \alpha\delta l}{1 - \cos \alpha\delta l} \sin \alpha l \right\} +$$

$$+ C_2 \left\{ -\frac{\alpha\kappa}{\cos \alpha\delta l} + \alpha(\kappa - \alpha^2)(\cos \alpha l + \operatorname{tg} \alpha\delta l \sin \alpha l) \right\} = 0.$$

Приравняв детерминант матрицы последней системы к нулю, получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\kappa \left[-2\alpha\delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha(1 - 2\delta)l - 4 \sin \alpha(1 - \delta)l \right] +$$

$$+ 2(\kappa - \alpha^2) [\alpha\delta l \cos \alpha\delta l - \sin \alpha\delta l] = 0. \quad (11)$$

В случае консервативной нагрузки ($\kappa = \alpha^2$) уравнение (11) примет вид

$$-2\alpha\delta l \cos \alpha l + 3 \sin \alpha l + \sin \alpha(1 - 2\delta)l - 4 \sin \alpha(1 - \delta)l = 0, \quad (12)$$

а в случае следящей нагрузки ($\kappa = 0$):

$$\alpha\delta l \cos \alpha\delta l - \sin \alpha\delta l = 0. \quad (13)$$

Скользящая заделка. Удовлетворяя условиям скользящей заделки конца $x = 0$:

$$\frac{d^3 w_1}{dx^3} = 0, \quad \frac{dw_1}{dx} = 0 \quad (x = 0)$$

и условиям непрерывности (2), будем иметь

$$w_1 = C_1 (\alpha\delta l - \alpha x - \sin \alpha\delta l + \sin \alpha x),$$

$$w_2 = C_1 \left\{ -\frac{1 - \cos \alpha\delta l}{\cos \alpha\delta l} (\alpha\delta l - \alpha x) - \sin \alpha\delta l + \operatorname{tg} \alpha\delta l \cos \alpha x \right\} +$$

$$+ C_2 \left\{ \frac{1}{\cos \alpha\delta l} (\alpha\delta l - \alpha x) + \sin \alpha x - \operatorname{tg} \alpha\delta l \cos \alpha x \right\}.$$

Удовлетворяя условиям (4), будем иметь

$$C_1 \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l + C_2 \{ \sin \alpha l - \operatorname{tg} \alpha \delta l \cos \alpha l \} = 0, \\ C_1 \left\{ (\alpha^2 - \kappa) \operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l + \kappa \frac{1 - \cos \alpha \delta l}{\cos \alpha \delta l} \right\} - \\ - C_2 \left\{ (\alpha^2 - \kappa) (\cos \alpha l + \operatorname{tg} \alpha \delta l \sin \alpha l) + \kappa \frac{1}{\cos \alpha \delta l} \right\} = 0.$$

Приравняв определитель матрицы к нулю, получим

$$(\alpha^2 - \kappa) \sin \alpha \delta l + \kappa \{ \sin \alpha l - \sin \alpha (1 - \delta) l \} = 0.$$

При $\kappa = 0$ (следящая нагрузка) критическая нагрузка определяется из уравнения

$$\sin \alpha \delta l = 0 \quad (14)$$

и дается формулой

$$\alpha = \frac{\pi}{\delta l}.$$

При $\kappa = \alpha^2$ (консервативная нагрузка) критическая нагрузка определяется из уравнения

$$\sin \alpha l - \sin \alpha (1 - \delta) l = 0 \quad (15)$$

и дается формулой

$$\alpha = \frac{\pi}{l(2 - \delta)}.$$

Численный анализ. Учитывая обозначение в (1), численный анализ и выводы будут делаться относительно параметра α , называя его при этом критической нагрузкой.

Рассмотрим крайние положения опоры. Пусть опора вплотную подходит к закрепленному концу стержня ($\delta \rightarrow 0$). Тогда, независимо от вида закрепления этого конца, будем иметь задачу устойчивости стержня с жестко закрепленным концом, критическая консервативная нагрузка для которой известна [10] и равна

$$\alpha = \frac{\pi}{2l}. \quad (16)$$

Анализируя поведение уравнений (7), (12) и (15) при $\delta \rightarrow 0$, нетрудно найти, что все эти три уравнения переходят в уравнение $\cos \alpha l = 0$, решением которого является (16). Для следящей нагрузки уравнения (8), (13) и (14) дают только нулевое решение.

В случае расположения опоры на свободном конце стержня ($\delta \rightarrow 1$) понятия “консервативная нагрузка” и “следящая нагрузка”, очевидно, совпадают, из уравнений (7) и (8), а также (14) и (15) получаем уравнение $\sin \alpha l = 0$, решением которого является $\alpha = \frac{\pi}{l}$, совпадающее с известным [10] результатом для шарнирно опертого по концам стержня.

Из уравнений же (12) и (13) получим уравнение

$$\alpha l \cos \alpha l - \sin \alpha l = 0,$$

решением которого является

$$\alpha = \frac{4.493409457\dots}{l} \approx \frac{\pi}{0.7l},$$

совпадающее с известным результатом [10] для стержня, жестко закрепленного на одном конце и шарнирно опертого на другом.

При промежуточных расположениях опоры зависимости критической консервативной нагрузки от расположения опоры представлены на рис.2. Индексом “1” отмечен график зависимости для шарнирно опертого конца, индексом “2” - для защемленного края, а индексом “3” - для скользяще заделанного края.

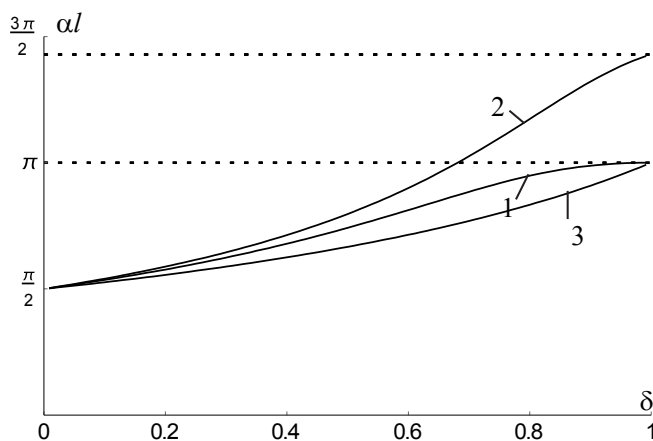


Рис. 2. Кривые зависимости критической нагрузки от места расположения опоры при разных условиях закрепления конца стержня

Для следящей нагрузки зависимости критической нагрузки от расположения опоры представляются аналитически:

$$\alpha l = \frac{\pi}{\delta} \quad - \text{ для шарнирно закрепленного конца и скользящей заделки;}$$

$$\alpha l = 4.493409457\dots \approx \frac{\pi}{0.7\delta} \quad - \text{ для защемленного конца.}$$

Очевидно, что в последних формулах уменьшение δ ограничивается условием прочности стержня

$$\sigma = \frac{P}{S} < [\sigma],$$

где S - площадь поперечного сечения; $[\sigma]$ - допускаемое напряжение на сжатие.

Заключение. Исследовано влияние промежуточной точечной опоры на величину критического усилия, вызывающего потерю устойчивости центрально-сжатого упругого стержня, при различных условиях закрепления одного его конца. Показано, что при расположении опоры близко к свободному концу стержня даже при следящей нагрузке возможна потеря устойчивости, причем величина критической следящей нагрузки всегда превосходит критическую консервативную нагрузку. Показано также, что при любом месте расположения опоры критическая консервативная нагрузка для стержня с защемленным концом превосходит подобное значение для стержня с шарнирно закрепленным концом, а последнее превосходит значение для стержня со скользяще заделанным концом.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору М.В. Белубекяну за постановку задачи и ценные указания при выполнении работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Shan W. and Chen Z.** Mechanical instability of thin elastic rods // Journal of Postdoctoral Research. – 2013. – Vol.1, No. 2. – P. 1-8.
2. Microtubules can bear enhanced compressive loads in living cells because of lateral reinforcement /**C.P. Brangwynne, L. Mahadevan, S. Kumar, et al**// JCB, The Journal of Cell Biology. – 2006, Jun 5.- 173(5). – P.733-741.
3. **Xu F., Lu W., Zhu Y.** Controlled 3D Buckling of Silicon Nanowires for Stretchable Electronics // ACS Nano. – 2011.– 5 (1).– P. 672–678.
4. **Liu Y., Xue Y.** Some Aspects of Research on Mechanics of Thin Elastic Rod // The 4th Symposium on the Mechanics of Slender Structures (MoSS2013): Journal of Physics: Conference Series. – 2013. – Vol. 448, 012001 – doi:10.1088/1742-6596/448/1/012001.

5. **Kolomiets L., Orobey V., Lymarenko A.** Non-conservative problems of the stability of bar structures // Tech. Journal.- Hrcak, Croatia, 2015. – Vol.9, No3. – P. 311-316.
6. **Баничук Н.В.** Оптимизация форм упругих тел. – М.: Наука, 1980. – 256 с.
7. **Гнуни В.Ц.** Оптимальный выбор расположения опор в задачах изгиба, колебаний и устойчивости упругой балки // В сб.: Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем. – Ереван: Изд. ЕГУ, 1997. – С.115-120.
8. **Гнуни В.Ц., Элоян А.В.** Оптимальный выбор расположения опор в задаче изгиба прямоугольной пластинки // Изв. НАН РА. Механика. –2001. – Т.54, №3. – С.14-17.
9. **Lee G.E., Reissner E.** Note on a problem of beam buckling // Journal of Applied Mathematics and Physics (ZAMP).– 1975. – 26.–P. 839.– doi:10.1007/BF01596086
10. **Вольмир А.С.** Устойчивость деформируемых систем.– М.: Наука, 1967.– 984 с.

Институт механики НАН РА. Материал поступил в редакцию 05.02.2017.

Ա.Ա. ՄԱՀԱԿՅԱՆ

ՀԵՆԱՐԱՆԻ ԴԻՐՔԱՎՈՐՄԱՆ ՏԵՂԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅՈՒՆԸ ՄԵՂՄՎԱԾ ՁՈՂԻ ԿՐԻՏԻԿԱԿԱՆ ՈՒՇԻ ՄԵԾՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Հետազոտվել է մեկ ծայրով ամրակցված և մյուս ծայրից կենտրոնական առանցքային բեռով սեղմվող ուղղաձիգ ձողի կայունության խնդիրը, երբ առկա է լրացուցիչ միջանկյալ հենարան: Դիտարկվել են ամրակցման երեք տարբեր պայմաններ՝ հողակապ, կոշտ ամրացում և սահող ամրացում, ինչպես նաև տարբեր բեռներ՝ կոնսերվատիվ և հետևող: Ստացվել են սեղմող կրիտիկական բեռի կախվածությունները լրացուցիչ հենարանի դիրքավորման տեղից:

Առանցքային բեռեր. ձող, կայունություն, միջանկյալ հենարան, կոնսերվատիվ ուժ, հետևող ուժ:

A.A. SAHAKYAN

THE INFLUENCE OF THE SUPPORT LOCATION ON THE VALUE OF CRITICAL LOAD OF THE COMPRESSED BAR

The stability problem of a straight bar with one fixed end, and compressed by a central axial load at the other end at an additional support is considered. Three cases of end-fixing: swivel support, fully fixed and slide bush, as well as different loads: conservative and follower are considered. The dependences of the critical compressive load on the location of additional support are obtained.

Keywords: bar, stability, intermediate support, conservative force, follower force.