

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

В. В. ВАРДАНЯН

К РАСЧЕТУ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛИТ НА УПРУГОМ
 ОСНОВАНИИ ПРИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ

В [1] изложен прием определения значений двух коэффициентов упругого основания, входящих в выражение упругого отпора

$$q = k\omega - 2t\Delta^2\omega,$$

для осесимметрично нагруженной круглой плиты. В данной заметке этот прием распространяется на случай цилиндрического изгиба прямоугольной плиты, лежащей на упругом основании. Другими словами, дается способ определения коэффициентов k и t для полосы в условиях плоской деформации. Рассмотрим прямоугольную полосу с размерами $2b \times 2l$, когда вдоль оси y на участке $-b \leq y \leq b$ действует постоянная нагрузка P на единицу длины (рис. 1).

Прогиб произвольной точки $A(x, y)$ поверхности основания определится формулой:

$$\omega(x, y) = \frac{P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \ln \frac{b-y+\sqrt{(b-y)^2+x^2}}{-b-y+\sqrt{(b+y)^2+x^2}}, \quad (1)$$

где E_0 и μ_0 соответственно модуль Юнга и коэффициент Пуассона основания. Из этой формулы следует, что прогибы точек, расположенных на прямой, отстоящей от оси y на расстоянии x , образуют плавную кривую с максимумом в середине:

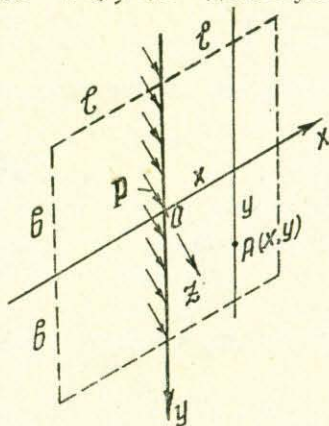


Рис. 1.

$$\omega(x, 0) = \frac{2P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \ln \frac{\sqrt{b^2+x^2}}{x}. \quad (2)$$

Сравнивая эти прогибы со средним прогибом, равным:

$$\omega_{cp} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b \omega dy = \frac{2P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \left(\ln \frac{b+\sqrt{b^2+0,25x^2}}{x} + \ln 2 - \frac{\sqrt{4b^2+x^2}-x}{2b} \right) \quad (3)$$

приходим к заключению, что если плита загружена как указано на рис. 1, и $b/l \geq 3$, то можно выделить вдоль оси x полосу и рассматривать ее как балку, лежащую на упругом основании, в условиях плоской деформации. При этом для прогибов вместо (2) можно пользоваться формулой:

$$w(x) = \frac{2P(1-\mu_0^2)}{\pi E_0} \ln \frac{2b}{x}. \quad (4)$$

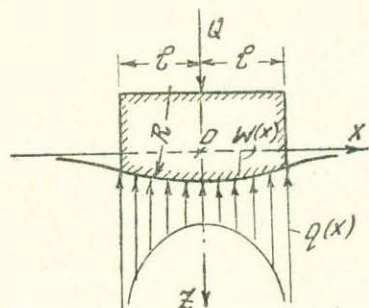


Рис. 2.

Рассмотрим теперь круговой цилиндрический жесткий штамп с большим радиусом R , шириной $2l$, вдавливаемый в упругую полуплоскость силой Q (рис. 2). При полном контакте, когда отпор грунта $q(x)$ на краях штампа получает бесконечное значение, имеем [2]:

$$q(x) = \frac{Q}{\pi \sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{E_0}{4R(1-\mu_0^2)} \cdot \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}}. \quad (5)$$

Осадка грунта определяется формулой:

$$w(x) = w_0 - \frac{x^2}{2R}. \quad (5)$$

Пользуясь обозначениями

$$\xi = \frac{x}{l}; \quad \delta = \frac{\pi E_0 l^2}{4QR(1-\mu_0^2)}; \quad k_0 = \frac{\pi E_0}{4l(1-\mu_0^2)}; \quad p_0 = \frac{Q}{2l}, \quad (7)$$

(5) можем переписать в следующем виде:

$$q(\xi) = \frac{2p_0}{\pi} \left(\frac{1-\delta}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\delta \sqrt{1-\xi^2} \right). \quad (8)$$

Прогиб w_0 в центре штампа в силу (4) и (8) будет равен:

$$w_0 = \frac{2p_0}{\pi k_0} \int_0^1 \left(\frac{1-\delta}{\sqrt{1-\xi^2}} + 2\delta \sqrt{1-\xi^2} \right) \ln \frac{2b}{l\xi} d\xi = \frac{p_0}{k_0} \left(\ln \frac{4b}{l} + \frac{\delta}{2} \right). \quad (9)$$

Из (7) и (9) для осадки плиты получим формулу:

$$w(\xi) = \frac{p_0}{k_0} \left(\lambda + \frac{\delta}{2} - \delta \xi^2 \right), \quad (10)$$

где

$$\lambda = \ln \frac{4b}{l}. \quad (11)$$

Если балка длиной $2l$ и жесткостью $D = \frac{E h^3}{12(1-\mu^2)}$ будет лежать на упругой полуплоскости, сверху будет загружена поперечной

нагрузкой $p(\xi)$, данной по закону (8), а к ее обоим концам будут приложены изгибающие моменты $M_1 = M_2 = \frac{D}{R}$, то прогиб балки определится формулой (10).

Предположим теперь, что балка лежит не на упругой полуплоскости, а на основании, характеризуемом двумя коэффициентами k и t (рис. 3).

Пользуясь выражением (10), для упругого отпора $q = kw - 2t w''$ получим выражение:

$$q(\xi) = p_0 \left(\lambda x + \frac{x\delta}{2} + 4\tau\delta - x\delta\xi^2 \right), \quad (12)$$

где

$$x = \frac{k}{k_0}; \quad \tau = \frac{t}{k_0 l^2}. \quad (14)$$

Поскольку $p(\xi) - q(\xi) \neq 0$, балка будет изгибаться. Определим значения коэффициентов x и τ из условия минимума потенциальной энергии изгиба балки от нагрузки $p(\xi) - q(\xi)$. Задача приводится к решению уравнения

$$\frac{d^4 w}{d\xi^4} = \frac{p_0 l^4}{D} \left[\frac{2(1-\delta)}{\pi \sqrt{1-\xi^2}} + \frac{4\delta}{\pi} \sqrt{1-\xi^2} + x\delta \cdot \xi^2 - \left(\lambda x + \frac{x\delta}{2} + 4\tau\delta \right) \right], \quad (14)$$

при граничных условиях

$$\left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)_{\xi=0} = \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)_{\xi=-1} = \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right)_{\xi=-1} = (w)_{\xi=-1} = 0. \quad (15)$$

Из (14) и (15) определив w , находим значение потенциальной энергии изгиба:

$$U = \frac{D}{2l^3} \int_{-1}^1 \left(\frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) d\xi = U(x, \tau). \quad (16)$$

Значения x и τ , соответствующие экстремумам $U(x, \tau)$ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \tau} \frac{\partial F}{\partial x} = 0; \quad F(x, \tau) = 0, \quad (17)$$

где функцией $F(x, \tau)$ устанавливается зависимость между x и τ на основании условия равновесия $\Sigma Z = 0$. В развернутом виде уравнения (17) записываются так:

$$(ax + b\tau - c)N \sqrt{\frac{x}{2\tau}} - (bx + e\tau - f) \left(M + \frac{N}{2} \sqrt{\frac{2\tau}{x}} \right) = 0; \quad (18)$$

$$x \left(M + N \sqrt{\frac{2\tau}{x}} \right) = 1,$$

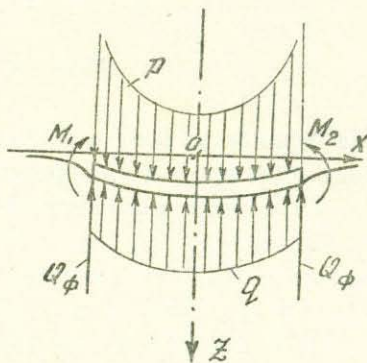


Рис. 3.

где

$$a = \frac{\lambda^2}{45} + \frac{\lambda\delta}{63} + \frac{163\delta^2}{56700}; \quad e = \frac{16}{45}\delta^2; \quad b = \frac{4}{45}\delta\left(\lambda + \frac{5}{14}\delta\right);$$

$$f = \frac{\delta}{16}\left(1 + \frac{2}{3}\delta\right); \quad c = \frac{\lambda}{64} + \frac{\lambda\delta}{96} + \frac{\delta}{180} + \frac{29\delta^2}{7680};$$

$$M = \lambda + \frac{\delta}{6}; \quad N = \lambda - \frac{\delta}{2}. \quad (19)$$

Найденные из (18) и (19) коэффициенты κ и τ зависят от безразмерных величин δ и λ , определяемых формулами (7) и (11).

Пределы изменения δ можно установить, исходя из следующих соображений: δ_{\min} соответствует случаю, когда $q(0) = 0$, что дает $\delta_{\min} = -1$; δ_{\max} соответствует случаю, когда $\tau = 0$ (гипотеза Винклера), причем δ_{\max} зависит от λ . О пределах изменения λ можно сказать, что $\lambda_{\min} = \ln 12 \approx 2,5$, когда $(b/l)_{\min} = 3$. λ_{\max} устанавливается практически соображениями о допускаемом максимальном отношении размеров плиты $(b/l)_{\max}$. Например, если мы примем $(b/l)_{\max} = 20$, то получим

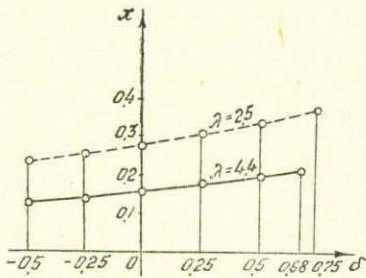


Рис. 4.

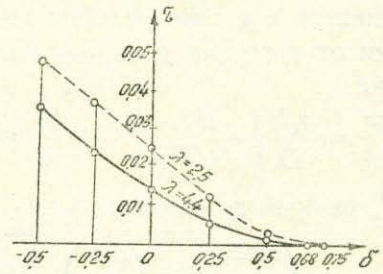


Рис. 5.

$\lambda_{\max} = 4,4$, значит параметр λ изменяется от 2,5 до 4,4. Исходя из (18), построены кривые, выражающие зависимости κ и τ от δ для значений $\lambda = 2,5$ и $\lambda = 4,4$ (рис. 4 и 5).

Найденные таким образом κ и τ относятся к частной задаче об изгибе балки при нагрузках, изображенных на рис. 3. Если балка будет находиться под действием произвольной симметричной относительно середины нагрузки p , то величины κ и τ могут быть определены следующим образом. Полагая $p = p_0 \cdot f(\xi)$, где p_0 — среднее значение нагрузки, $f(\xi)$ — безразмерная функция, будем аппроксимировать изгиб балки от нагрузки p ближайшим чистым изгибом. Это означает, что изгиб балки сопоставляем с чистым изгибом при отпоре основания по (12) и прогибе по (10), в которых параметр δ выбираем в зависимости от нагрузки p надлежащим образом. Если δ получает приращение $d\delta$, то по принципу возможных перемещений

$$dA_p + dA_q - dU = 0, \quad (20)$$

где dA_p — элементарная работа внешней нагрузки p , dA_q — элементарная работа упругого отпора, $-dU$ — элементарная работа внутрен-

них сил балки, равная приращению потенциальной энергии с обратным знаком.

Имеем

$$dA_p = l \int_{-1}^1 (p dw) d\xi; \quad dA_q = -l \int_{-1}^1 (q dw) d\xi,$$

где из (10):

$$dw = \frac{p_0}{k_0} \left(\frac{1}{2} - \xi^2 \right) d\delta.$$

Потенциальная энергия воображаемого чистого изгиба равна

$$U = 2 \cdot \frac{1}{2} M_0 \varphi_0,$$

где

$$M_0 = \frac{D(1+\nu)}{R}; \quad \varphi_0 = \frac{l}{R}.$$

Учитывая зависимость (7) между R и δ , из (20) находим:

$$\delta = \frac{4}{1 + \frac{16}{\sigma}} \int_0^1 f(\xi) \left(\frac{1}{2} - \xi^2 \right) d\xi, \quad (21)$$

где σ — относительная гибкость балки, определяемая формулой:

$$\sigma = 3 \pi \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \frac{1-\mu}{1-\mu_0^2} \cdot \frac{l^3}{h^3} \approx 10 \cdot \frac{E_0}{E} \cdot \frac{l^3}{h^3}. \quad (22)$$

При сосредоточенных силах интеграл в правой части (21) нужно понимать в смысле Стильтьеса, т. е. если кроме нагрузки p имеются еще силы P_i , приложенные в точках $\xi = \xi_i$, то (21) примет вид:

$$\delta = \frac{4}{1 + \frac{16}{\sigma}} \left[\int_0^1 f(\xi) \left(\frac{1}{2} - \xi^2 \right) d\xi + \frac{1}{2p_0 l} \sum P \left(\frac{1}{2} - \xi^2 \right) \right]. \quad (23)$$

Таким образом, задача определения двух коэффициентов k и t упругого основания при произвольной симметричной нагрузке осуществляется следующим образом. По заданным размерам плиты и нагрузке находим λ из (11), δ из (21) или (23). Далее, из (18) находим параметры α и τ , а по формулам (14) — коэффициенты k и t . Если построить семейства кривых $\beta_1 = \tau : \alpha = \varphi_1(\lambda, \delta)$ и $\beta_2 = \lambda \alpha = \varphi_2(\lambda, \delta)$, то оказывается, что в интервале от $\delta = -0,5$ до $\delta = +0,75$ эти кривые образуют пучки близко расположенных линий (рис. 6 и 7), которые при изменении λ от $\lambda = 2,5$ до $\lambda = 4,4$ практически не зависят от λ и с достаточной точностью могут быть аппроксимированы при помощи формул:

$$\beta_1 = \tau : \alpha = 0,19 \delta^2 - 0,261 \delta + 0,0893; \quad (24)$$

$$\beta_2 = \lambda \alpha = 0,12 \delta^2 + 0,3 \delta + 0,703, \quad (25)$$

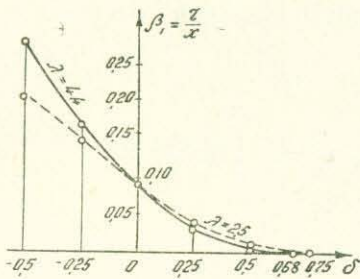


Рис. 6.

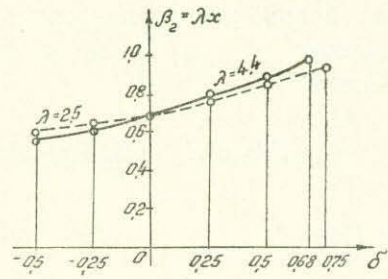


Рис. 7.

в которых числовые коэффициенты определены методом наименьших квадратов. На основании (24) и (25) для основных коэффициентов получим следующие значения:

$$k = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \frac{1}{\lambda} \beta_1^2; \quad t = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{E_0}{1-\mu_0^2} \frac{1}{\lambda} \beta_1 \beta_2. \quad (26)$$

Из (26) следует, что оба коэффициента k и t обратно пропорциональны величине λ , характеризующей протяженность плиты в направлении оси y . Это означает, что абсолютные прогибы w будут пропорциональны λ . Однако все остальные расчетные величины—изгибающие моменты, поперечные силы, упругие опоры, относительные прогибы

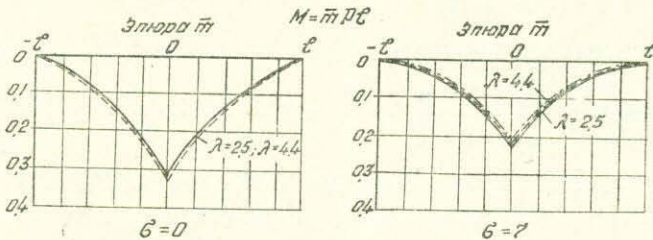


Рис. 8.

и углы наклона практически мало зависят от λ , так как в выражениях названных величин λ будет участвовать в виде произведения λx . На рис. 9 приведены эпюры изгибающего момента для балки, в середине пролета которой приложена сосредоточенная сила P , при $\lambda = 2,5$ и $\lambda = 4,4$; $\sigma = 0$ и $\sigma = 7$. Расчеты проведены для значений κ и τ , взятых из рис. 4 и 5. Сплошными линиями воспроизведены эпюры, построенные по данным М. И. Горбунова-Посадова [3].

Ер. ПИ им. К. Маркса

Поступило 5. II. 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Варданян В. В. К теории расчета плит на упругом основании. Сб. тр. IV Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин, Ереван, 1963.
2. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, Москва, 1953.
3. Горбунов-Посадов М. И. Расчет конструкций на упругом основании, Стройиздат, М., 1953.