

А.А. БАГИЯН

**О НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЯХ В ДИНАМИКЕ СИСТЕМ СОПРОВОЖДЕНИЯ
НАЗЕМНЫХ ОБЪЕКТОВ С ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

Рассмотрена динамика систем сопровождения наземных объектов с летательных аппаратов. Выявлены неопределенности в динамике систем сопровождения, влияющие на качество реализации задачи управления. Проведена оценка степени воздействия этих неопределенностей на динамику систем.

Ключевые слова: летательный аппарат, сопровождение, динамика системы, неопределенность в модели системы.

Введение. Системы сопровождения объектов являются одними из основных в составе обзорно-прицельных комплексов современных летательных аппаратов (ЛА). Для сопровождения объектов в обзорно-прицельных комплексах необходимо визирную линию, соединяющую центр подвижной марки (в виде перекрестия, квадрата, круга или иной геометрической фигуры) с ее проекцией на земной поверхности, постоянно наводить на эти объекты. Системы сопровождения (рис. 1), как системы автоматического управления, в общем случае состоят из [1]

- задающего устройства;
- корректирующего устройства (КУ);
- объекта управления;
- датчика угла (ДУ).

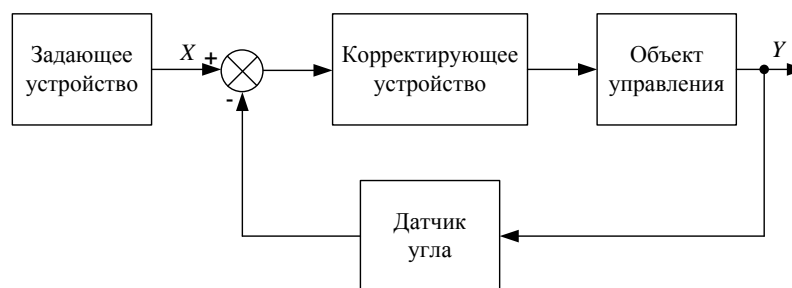


Рис. 1. Система сопровождения объектов с ЛА

Корректирующее устройство представляет собой регулятор, улучшающий качество управления и обеспечивающий заданные динамические свойства системы сопровождения. Объект управления – неизменяемая часть системы сопровождения, включающая электродвигатель с механическими исполнительными элементами

и платформу с информационно-измерительной аппаратурой обзорно-прицельного комплекса. Датчик угла измеряет отработанные объектом управления координаты и подает их на сравнение с координатами, поступающими из задающего устройства, для обеспечения отрицательной обратной связи (ООС). Регулятор, объект управления и ДУ, заключенные в контур ООС, образуют следящую систему ориентации визирной линии. Динамика системы сопровождения в целом определяется именно составом и принципом действия следящей системы.

1. Обобщенные уравнения динамики системы сопровождения. Рассмотрим процесс сопровождения наземной цели с ЛА, суть которого состоит в отработке ее двух угловых координат, поступающих из задающего устройства. Непосредственно отработка заданных координат производится объектом управления (электродвигателями и механическими исполнительными устройствами).

Данная система имеет две степени свободы, следовательно, ее динамику можно описать с помощью двух обобщенных координат q_1, q_2 – углов поворота визирной линии для ее наведения на наземный объект. Кинематическая схема системы ориентации визирной линии представлена на рис. 2.

Для вывода уравнений динамики объекта управления введем следующие системы координат (СК). В качестве базовой выберем связанную с ЛА систему координат $OX_1Y_1Z_1$ (рис. 2). Системы координат $OX_2Y_2Z_2, OX_3Y_3Z_3$ выбираем таким образом, чтобы они были правыми, а повороты на положительные углы q_1, q_2 происходили вокруг осей OZ_2 и OZ_3 соответственно.

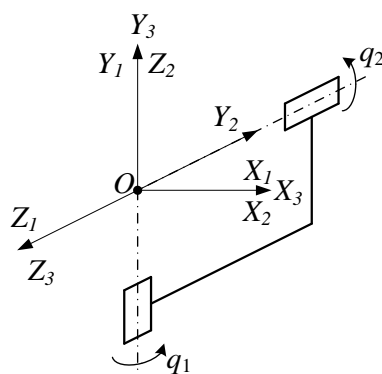


Рис. 2. Кинематическая схема системы ориентации визирной линии

Сведем в таблицу параметры Денавита-Хартенберга [2] $\alpha_i, a_i, d_i, \theta_i, i=1,2,3$ для данной кинематической схемы, где α_i – угол между осями OZ_i и OZ_{i+1} относительно оси OX_i ; a_i – расстояние между осями OZ_i и OZ_{i+1} вдоль оси OX_i ; d_i – расстояние между осями OX_{i-1} и OX_i вдоль оси OZ_i ; θ_i – угол между осями OX_{i-1} и OX_i относительно оси OZ_i .

Параметры Денавита-Хартенберга

i	α_{i-1}	a_{i-1}	d_i	θ_i
2	-90°	0	0	q_1
3	90°	0	0	q_2

При этом СК $\{i\}$ определяется в СК $\{i-1\}$ следующей матрицей преобразований [2-5]:

$${}^{i-1}T_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1}d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1}d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где $c\theta_i$, $s\theta_i$ и $c\alpha_{i-1}$, $s\alpha_{i-1}$ – короткие обозначения косинусов и синусов углов θ_i и α_{i-1} соответственно.

Уравнение динамики механической части системы в общем случае представляется в форме Эйлера-Лагранжа следующим образом [2-5]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \tau, \quad (2)$$

где L – лагранжиан, который определяется как разность между кинетической K и потенциальной P энергией системы; q – обобщенные координаты системы; τ – обобщенные внешние силы.

Будем считать, что механическая часть системы сбалансирована, а потенциальная энергия P системы является постоянной. Тогда выражение (2) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial K}{\partial q} = \tau. \quad (3)$$

Кинетическая энергия системы, кинематическая схема которой представлена на рис. 2, определяется известными выражениями следующим образом [3]:

$$K = \sum_{i=1}^n K_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \text{Trace} \left[\sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^i \left(\frac{\partial T_i}{\partial q_j} I_i \frac{\partial T_i^T}{\partial q_k} \right) \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_k}{dt} \right], \quad (4)$$

где $n = 2$ – число степеней свободы системы; $\text{Trace} [R]$ – обозначает след матрицы R ; T_i – матрица однородных преобразований от базовой СК к i -й системе

координат, а матрица I_i размерности 4×4 представляет собой матрицу (тензор) псевдоинерции [3] и выражается так:

$$I_i = \begin{bmatrix} \frac{-I_{ixx} + I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{ixy} & I_{ixz} & 0 \\ I_{ixy} & \frac{I_{ixx} - I_{iyy} + I_{izz}}{2} & I_{iyz} & 0 \\ I_{ixz} & I_{iyz} & \frac{I_{ixx} + I_{iyy} - I_{izz}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_i \end{bmatrix},$$

где m – масса i -го тела, кг; I_{ixx} , I_{iyy} , I_{izz} – центральные моменты инерции относительно осей x , y , z , кг·м²; I_{ixy} , I_{ixz} , I_{iyz} – центробежные моменты инерции, кг·м².

Подставляя выражения (4) в (3), после несложных преобразований в скалярной форме получаем [3]

$$\sum_{j=1}^n m_{ij}(q) \frac{d^2 q}{dt^2} + c_i \left(q, \frac{dq}{dt} \right) = \tau_i, \quad (5)$$

$$i = 1, 2,$$

или в векторной форме:

$$M(q) \frac{d^2 q}{dt^2} + C \left(q, \frac{dq}{dt} \right) = \tau, \quad (6)$$

где элементы $m_{ij}(q)$ и $c_i(q, dq/dt)$ выражаются через тензор псевдоинерции в следующем виде:

$$m_{ij}(q) = \sum_{p=1}^n \text{Trace} \left(\frac{\partial T_p}{\partial q_j} I_p \frac{\partial T_p^T}{\partial q_i} \right),$$

$$c_i \left(q, \frac{dq}{dt} \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ijk} \left(q, \frac{dq}{dt} \right) \frac{dq_j}{dt} \frac{dq_k}{dt}, \quad i = 1, 2.$$

Здесь $c_{ijk}(q, dq/dt)$ – символы Кристоффеля первого рода, определяемые по известным выражениям [4].

Производные матриц T_i по скалярным координатам q_i (где последние измеряются относительно соответствующих осей Z_i) можно представить следующим образом [4, 5]:

$$\frac{\partial T_i}{\partial q_j} = S T_i,$$

где S – кососимметрическая матрица ($S = -S^T$):

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Для данной системы производные матриц T_i выражаются в виде

$$\frac{\partial T_1}{\partial q_1} = S^2 {}^1T, \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_1} = S^2 {}^1T {}^2T, \quad \frac{\partial T_2}{\partial q_2} = {}^1T S^2 {}^3T,$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial q_1^2} = S^2 {}^2T, \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1^2} = S^2 {}^1T {}^2T, \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial q_1 \partial q_2} = S^2 {}^1T S^2 {}^3T, \quad \frac{\partial^2 T_2}{\partial q_2^2} = {}^1T S^2 {}^2T,$$

где матрицы ${}^{i-1}T$, $i = 2, 3$ определяются выражением (1) по приведенным в таблице параметрам. Далее подробно рассмотрим модель системы сопровождения с учетом динамики ее исполнительных устройств.

2. Динамика системы сопровождения с учетом параметров исполнительных устройств. Управление ориентацией визирной линии осуществляется изменением моментов $\tau_{дв}$, создаваемых электродвигателями и передаваемых на исполнительные механизмы с помощью редукторов. В исполнительных устройствах авиационной техники чаще применяют электродвигатели постоянного тока независимого возбуждения с управлением по напряжению якоря [6].

Передачная функция электродвигателя выражается формулой [6]

$$W(s) = \frac{\omega_{дв}(s)}{u(s)} = \frac{k}{Ts + 1}, \quad (7)$$

где $\omega_{дв}(s)$ – преобразование Лапласа угловой скорости электродвигателя; $u(s)$ – преобразование Лапласа напряжения якоря; $k = 1/k_E$ – коэффициент усиления; $T = R_{я}J / (k_E k_M)$ – электромеханическая постоянная времени; k_E – постоянная противо-ЭДС; k_M – моментная постоянная; $R_{я}$ – омическое сопротивление обмотки якоря; J – момент инерции якоря электродвигателя.

Уравнения динамики электродвигателей постоянного тока рассматриваемой системы сопровождения можно привести к следующему векторному виду:

$$\text{diag}\{J_i\} \frac{d\omega_{\text{дв}}}{dt} = \tau_{\text{дв}} - \text{diag}\left\{\frac{1}{z_{\text{pi}}}\right\} \tau - \tau_{\text{тр}}, \quad i = 1, 2, \quad (8)$$

где $\text{diag}\{J_i\}$ – диагональная матрица моментов инерции якоря; $\omega_{\text{дв}} = [\omega_{\text{дв1}} \quad \omega_{\text{дв2}}]^T$ – вектор угловых скоростей; $\tau_{\text{дв}} = [\tau_{\text{дв1}} \quad \tau_{\text{дв2}}]^T$ – вектор моментов электродвигателей системы; z_{pi} – передаточные числа редукторов; $\tau = [\tau_1 \quad \tau_2]^T$ – вектор обобщенных внешних сил системы, определяемых уравнением (6); $\tau_{\text{тр}} = [\tau_{\text{тр1}} \quad \tau_{\text{тр2}}]^T$ – вектор моментов сил трения.

На практике трение $\tau_{\text{тр}}$ рассматривают в виде суммы вязкого $\tau_{\text{трв}}$ и сухого $\tau_{\text{трс}}$ трений в механических узлах системы. Вязкое трение обусловлено относительной скоростью соприкасающихся поверхностей и может быть выражено формулой [2, 5]:

$$\tau_{\text{трв}} = \text{diag}\{k_{Vi} z_{\text{pi}}\} \frac{dq}{dt}, \quad i = 1, 2, \quad (9)$$

где k_{Vi} – коэффициенты скоростного трения.

Сухое трение зависит от направления вращения ротора электродвигателя и определяется с помощью следующей функции:

$$\tau_{\text{трс}} = \text{diag}\{k_{Ci}\} \text{sign}\left\{\frac{dq}{dt}\right\}, \quad i = 1, 2, \quad (10)$$

где k_{Ci} – коэффициенты сухого трения, а функция $\text{sign}\{x\}$ определяется знаком x и принимает значения ± 1 .

С учетом того, что вектор угловых скоростей $\omega_{\text{дв}}$ связан с вектором обобщенных скоростей dq/dt данной системы зависимостью $\omega_{\text{дв}} = \text{diag}\{z_{\text{pi}}\} dq/dt$, $i = 1, 2$, на основе уравнений (6), (8)–(10) после несложных математических преобразований получаем обобщенные уравнения динамики системы с учетом параметров электродвигателей:

$$M^*(q) \frac{d^2 q}{dt^2} + B^*\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \frac{dq}{dt} = DU - \text{diag}\{z_{\text{pi}} k_{Ci}\} \text{sign}\left\{\frac{dq}{dt}\right\}, \quad i = 1, 2, \quad (11)$$

где $M^*(q) = \text{diag}\{z_{\text{pi}}^2 J_i\} + M(q)$;

$$B^*\left(q, \frac{dq}{dt}\right) = \text{diag}\left\{\frac{z_{\text{pi}}^2 k_{Ei} k_{Mi}}{R_{\text{яi}}}\right\} + \text{diag}\{z_{\text{pi}}^2 k_{Vi}\} + B\left(q, \frac{dq}{dt}\right);$$

$B\left(q, \frac{dq}{dt}\right)$ – известная матрица, определяемая из уравнения (6);

$D = \text{diag} \left\{ \frac{z_{pi} k_{Mi}}{R_{\text{я}i}} \right\}$; $U = [u_1 \ u_2]^T$ – вектор напряжений, подаваемых на вход

электродвигателей.

Уравнение (11) описывает динамику системы сопровождения с учетом параметров электродвигателей и механических передач.

На основе полученных выше уравнений математическую модель системы сопровождения можно представить с помощью структурной схемы (рис. 3), где I – единичная матрица размерности 2×2 .

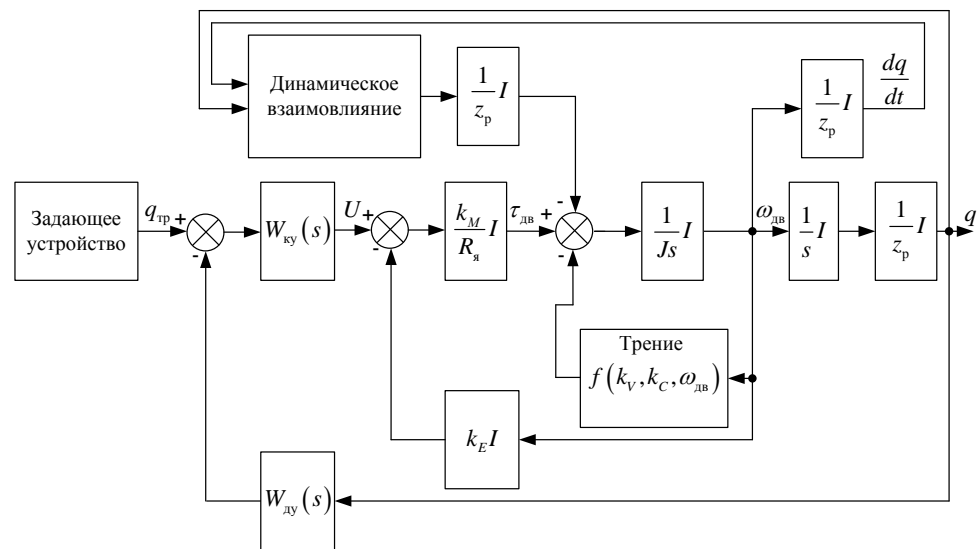


Рис. 3. Структурная схема системы сопровождения

В следующем пункте рассмотрим вопросы влияния моментов сил трения на динамику системы сопровождения в условиях полета ЛА.

3. Неопределенности в модели объекта управления. Обобщенные силы, обусловленные трением в механических исполнительных устройствах, могут быть большими даже для нормальных (наземных) условий и достигать 25% от требуемых усилий передвижения составных частей [2]. Поэтому эти силы имеют существенное влияние на динамику системы в целом.

Коэффициент вязкого трения k_v двигателя является постоянной величиной и задается технической документацией. Информацию о сухом трении в механизмах обычно трудно определить даже в лабораторных условиях, а при энергичном маневре ЛА с большими перегрузками в полете – практически невозможно. С

учетом сказанного возникает неопределенность в динамике системы сопровождения (11).

Для моделирования динамики системы и оценки возможных величин неопределенностей в модели объекта управления рассмотрим причины возникновения сухого трения. Известно, что сухое трение обусловлено реакциями между соприкасающимися поверхностями. Источниками возникновения реакций в виде внутренних усилий в элементах конструкции ЛА служат перегрузки [7], которые в различных частях ЛА, в общем случае, различны (рис. 4).

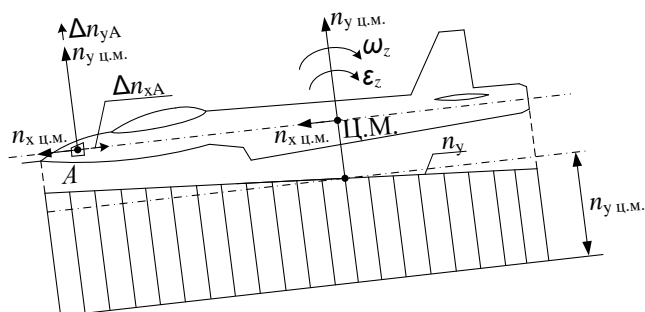


Рис. 4. Распределение перегрузок при маневре ЛА

Для современных ЛА в отдаленных от центра масс точках дополнительная разность перегрузки Δn_{yA} может достигать 1...2 единиц [7].

Для учета влияния перегрузок на силы сухого трения при моделировании динамики системы в качестве их взаимной зависимости в первом приближении принята прямая пропорциональность [7].

4. Моделирование динамики системы сопровождения в среде MATLAB.

Проведем моделирование процесса сопровождения наземной цели в условиях перегрузок и исследуем динамику системы сопровождения в зависимости от величин и предполагаемой доли участия сил сухого и вязкого трений в образовании обобщенных сил системы.

Пусть в полете ЛА сопровождает наземную цель, при этом ее угловые координаты $q_{1т}, q_{2т}^\circ$, поступающие из задающего устройства, зависят от времени следующим образом:

$$\begin{cases} q_{1т}(t) = a \sin(\omega t + \alpha), \\ q_{2т}(t) = b \cos(\omega t + \beta), \end{cases}$$

где $a = 116,48$, $\alpha = 4,93^\circ$, $b = -347,85$, $\beta = -86,71^\circ$, $\omega = \pi/180$, $q_{1т}(0) = 10^\circ$, $q_{2т}(0) = -20^\circ$.

Полет происходит в условиях перегрузок в обоих каналах системы сопровождения со значениями $n_{1,2} = 0,9$ единиц в каждом канале.

Моделированием в среде MATLAB десятисекундного участка сопровождения наземной цели в условиях перегрузок получены оценки влияния последних на динамическую ошибку следящей системы (рис. 5 и 6).

Как видно из результатов моделирования, при нулевых значениях перегрузок, т.е. при номинальных значениях сил сухого трения, динамическая ошибка сопровождения в обоих каналах с течением времени стремится к некоторому постоянному значению (около $0,01^\circ$). С увеличением перегрузок динамическая ошибка сопровождения возрастает и для перегрузок 9 единиц в обоих каналах достигает значений $1,3^\circ$.

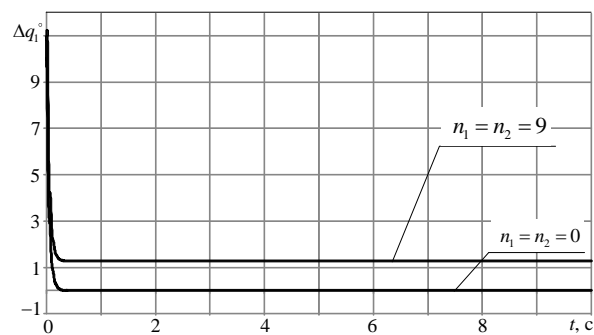


Рис. 5. Влияние перегрузок на динамическую ошибку Δq_1 в канале I

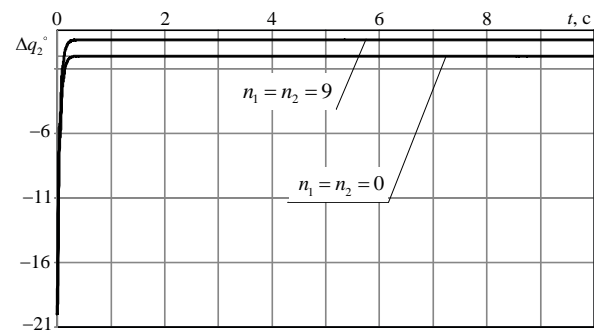


Рис. 6. Влияние перегрузок на динамическую ошибку Δq_2 в канале II

Рост динамической ошибки с увеличением перегрузок в полете ЛА физически закономерен и объясняется увеличением сил сухого трения.

Заключение. В работе рассмотрена зависимость сухого трения механической системы от перегрузок в полете, воздействие которых может непосредственно влиять на динамические ошибки. В условиях полета учет подобной зависимости не всегда возможен. Следовательно, для улучшения динамических характеристик авиационных систем сопровождения с учетом неопределенностей в модели объекта управления следует применять робастный регулятор, синтез которого будет рассмотрен в последующих работах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт. Т. 1: Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления / Под ред. **К.А. Пупкова, Н.Д. Егупова**. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 656 с.
2. **Craig J.J.** Introduction to Robotics: Mechanics and Control. – Prentice Hall, 2005. – 408 p.
3. **Paul R.P.** Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control. – The MIT Press, 1981. – 279 p.
4. **Spong M.W., Hutchinson S., Vidyasagar M.** Robot Modeling and Control. – John Wiley and Sons, 2006. – 496 p.
5. **Corke P.** Robotics, Vision and Control. Fundamental Algorithms in MATLAB. – Springer, 2011. – 570 p.
6. **Казаков И.Е., Исаев В.Н.** Основы автоматических систем авиационного вооружения. – М.: Издательство ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 1991. – 332 с.
7. **Конструкция** и прочность летательных аппаратов / Под ред. **О.В. Болховитинова**. – М.: Издательство ВВИА им. Н.Е. Жуковского, 2004. – 678 с.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.09.2013.

Ա.Հ. ԲԱՂԻՅԱՆ

ԹՈՂՈՂ ՍԱՐՔԵՐԻՑ ՎԵՐԳԵՏՆՅԱ ՕԲՅԵԿՏՆԵՐԻ ՈՒՂԵԿՑՄԱՆ ՀԱՄԱԿԱՐԳԵՐԻ ԴԻՆԱՄԻԿԱՅԻ ԱՆՈՐՈՇՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Դիտարկված է թռչող սարքերից վերգետնյա օբյեկտների ուղեկցման համակարգերի դինամիկան: Համակարգերի դինամիկայում մատնանշվել են կառավարման որակի վրա ազդող անորոշություններ: Իրականացվել է այդ անորոշությունների ազդեցության գնահատումը համակարգի դինամիկայի վրա:

Առանցքային բառեր. թռչող սարք, ուղեկցում, համակարգի դինամիկա, համակարգի ստեղծված անորոշություններ:

A.H. BAGHIYAN

ON THE UNCERTAINTIES IN DYNAMICS OF THE GROUND TARGET TRACKING SYSTEMS FROM AIRCRAFT

The dynamics of the system of ground target tracking from an aircraft is considered. Uncertainties in the dynamics of tracking systems are revealed, influencing the quality of realization of automatic control. Evaluation of the impact of uncertainties on the dynamics of the systems is carried out.

Keywords: aerial vehicle, tracking, dynamics of the system, uncertainties in the model of the system.