ISSN 0002-306X. Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. 2014. Т. LXVII, № 2.

УДК 621.52+511.52 **АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

С.О. СИМОНЯН, Г.А. АСЛАНЯН

МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ (B, Q)- ОБОБЩЕННО-ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения параметрических (B, Q)- обобщенно-обратных матриц [1], основанный на дифференциальных преобразованиях Г.Е. Пухова. Рассмотрен модельный пример.

Ключевые слова: параметрические обобщенно-обратные матрицы, дифференциальные преобразования, информационные технологии.

Введение. Рассмотрим систему линейных параметрических уравнений вида

$$A(t)\overline{x}(t)=\overline{y}(t), \tag{1}$$

где $\overline{A}(t)$ - параметрическая матрица с размерами $m \times n$ и рангом r; $\overline{x}(t)$ - искомый n-мерный вектор; $\overline{y}(t)$ - заданный m–мерный вектор.

Матрицу $\overline{A}(t)$, при которой решение системы (1) можно представить в виде

$$\overline{x}(t)=\overline{A}(t)\overline{y}(t), \tag{2}$$

назовем обобщенно-обратной (О-обратной) к матрице $A(t)$. Для этой матрицы необходимо и достаточно выполнение условия [1]

$$A(t)\overline{A}(t)A(t)=A(t). \tag{3}$$

В работе [1] предложен метод классификации О-обратных матриц на основе соотношений между рангом r и размерами $m \times n$ матрицы $A(t)$. Рассмотрены следующие возможные случаи:

$$\begin{aligned}&1.\ r=m<n.\\&2.\ r=n<m.\\&3.\ r<m<n.\\&4.\ r<n<m.\\&5.\ r=m=n.\end{aligned} \tag{4}$$

По существу, случаи 3 и 4, очевидно, совпадают; случаи 1 и 2 рассмотрены в работе [2], а в последнем случае матрица $A(t)$ имеет единственную обратную матрицу, и все множество О-обратных к ней матриц состоит из элемента $A^{-1}(t)$. В дальнейшем мы будем рассматривать только случай 3.

Пусть $r < m < n$. В этом случае матрица $A(t)$ является существенно недоопределенной [1]. Представим матрицу $A(t)$ в виде ее скелетного разложения [1]

$$A(t) = S(t)R(t), \tag{5}$$

где $S(t)$ и $R(t)$ - матрицы размерностей m x r и r x n соответственно. Тогда систему (1) можно представить в следующем виде:

$$S(t)R(t)\bar{x}(t) = \bar{y}(t). \tag{6}$$

Далее, обозначив

$$R(t)\bar{x}(t) = \bar{z}(t), \tag{7}$$

получим

$$S(t)\bar{z}(t) = \bar{y}(t). \tag{8}$$

Имея в виду случаи 1 и 2 [2], решения систем (7) и (8) будут представлены в следующем виде:

$$\bar{x}(t) = \bar{R}(t)\bar{z}(t), \bar{R}(t) = B(t)[R(t)B(t)]^{-1}, \tag{9}$$

$$\bar{z}(t) = \bar{S}(t)\bar{y}(t), \bar{S}(t) = [Q(t)S(t)]^{-1}Q(t), \tag{10}$$

где $\bar{R}(t)$ - обобщенно (В)-обратная матрица к матрице $R(t)$; матрица $\bar{S}(t)$ - обобщенно (Q)-обратная к матрице $S(t)$, а матрицы $B(t)$ и $Q(t)$ являются матрицами размерности n x r и r x m соответственно [1].

Следовательно, для решения $\bar{x}(t)$ имеем

$$\bar{x}(t) = \bar{R}(t)\bar{S}(t)\bar{y}(t) = B(t)[R(t)B(t)]^{-1}[Q(t)S(t)]^{-1}Q(t)\bar{y}(t). \tag{11}$$

В этом случае матрица $\bar{A}(t)$, определяемая соотношением

$$\bar{A}(t) = \bar{R}(t)\bar{S}(t) = B(t)[R(t)B(t)]^{-1}[Q(t)S(t)]^{-1}Q(t), \tag{12}$$

удовлетворяет равенству (3) и, следовательно, является О-обратной к матрице $A(t)$ [1].

Естественно, матрицы $B(t)$ и $Q(t)$ нужно выбрать так, чтобы матрицы $R(t)B(t)$ и $Q(t)S(t)$ были невырожденными. В этом случае матрица $\bar{A}(t)$ называется (В, Q)-обратной к матрице $A(t)$ [1].

В таблице представлены важнейшие свойства (B, Q)- обратных матриц, а также обобщенно-обратных матриц Мура-Пенроуза $A^{+}(t)$ [3] (знаком “+” обозначено, что условия выполняются).

Таблица

No	Свойства О-обратных матриц	Классы О-обратных матриц	
		(B,Q)-обратные	$A^{+}(t)$
1	$A(t)\overline{A}(t)A(t) = A(t)$	+	+
2	$\left[\overline{A}(t)A(t)\right]^2 = \overline{A}(t)A(t)$	+	+
3	$\left[A(t)\overline{A}(t)\right]^2 = A(t)\overline{A}(t)$	+	+
4	$\overline{A}(t)A(t)\overline{A}(t) = \overline{A}(t)$	+	+

Математический аппарат предлагаемого метода. Допустим, что $A(t)$ – матрица с аналитическими элементами.

Сначала представим алгоритм скелетного разложения матрицы. Выберем r линейно независимых столбцов матрицы $A(t)$ и составим матрицу $S(t)$ ранга r и размерами m x r :

$$S(t) = \begin{bmatrix} s_{11}(t) & \cdots & s_{1r}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ s_{m1}(t) & \cdots & s_{mr}(t) \end{bmatrix}.$$

Произвольный столбец матрицы $A(t)$ можно представить в виде линейной комбинации столбцов матрицы $S(t)$

$$\overset{\downarrow}{a}_j(t) = S(t)\overset{\downarrow}{r}_j(t),\ j = \overline{1,n}, \tag{13}$$

где $\overset{\downarrow}{a}_j(t)$ и $\overset{\downarrow}{r}_j(t)$ - j-е столбцы матриц $A(t)$ и $R(t)$ соответственно.

Следовательно, для нахождения матрицы $R(t)$ нужно решить систему уравнений (13), решение которого, как известно [1], выражается следующим соотношением:

$$\overset{\downarrow}{r}_j(t) = \overline{S}(t)\overset{\downarrow}{a}_j(t),\ j = \overline{1,n}, \tag{14}$$

где $\overline{S}(t)$- обобщенно-обратная матрица к матрице $S(t)$. Поскольку матрица $S(t)$ имеет размерность m x r и состоит из r линейно независимых столбцов, то матрица $\overline{S}(t)$ является (Q)-обратной матрицей и представляется следующим выражением:

$$S(t) = \left[Q(t)S(t)\right]^{-1}Q(t), \qquad (15)$$

где $Q(t)$ - $r \times m$ матрица такая, что $\left[Q(t)S(t)\right]$ является невырожденной [1].

Шаг 1. Вычисляется (Q)-обратная матрица к матрице $S(t)$, т.е. $\overline{S}(t)$, с помощью алгоритма, представленного в работе [2].

Шаг 2. Вычисляется матрица $R(t)$ с помощью следующего соотношения:

$$\overset{\downarrow}{r}_j(t) = \overline{S}(t)\overset{\downarrow}{a}_j(t),\ j = \overline{1,n}, \qquad (16)$$

где $\overset{\downarrow}{a}_j(t)$ и $\overset{\downarrow}{r}_j(t)$ - j-е столбцы соответственно матриц $A(t)$ и $R(t)$.

Шаг 3. Вычисляется (B)-обратная к матрице $R(t)$, т.е. $\overline{R}(t)$, также с помощью алгоритма, представленного в работе [2].

Шаг 4. Вычисляется (B, Q)-обратная матрица

$$\overline{A}(t) = \overline{R}(t)\overline{S}(t). \qquad (17)$$

<u>Д-аналог алгоритма вычисления (B, Q)-обратной матрицы</u>

Представим операции вышеприведенного алгоритма в области дифференциальных преобразований [4].

Шаг 1. Вычисляются следующие матричные дискреты:

$$A(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K A(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v}, K = \overline{0,\infty}\ \underline{\overline{\bullet}}\ A(t) = \aleph_1(t, t_v, H, A(K)), \qquad (18)$$

$$S(K) = \frac{H^K}{K!}\cdot\frac{\partial^K S(t)}{\partial t^K}\Big|_{t=t_v}, K = \overline{0,\infty}\ \underline{\overline{\bullet}}\ S(t) = \aleph_2(t, t_v, H, S(K)), \qquad (19)$$

где K – целочисленный аргумент; H – масштабный коэффициент; t_v – центр аппроксимации; $\aleph_1(t, t_v, H, A(K)), \aleph_2(t, t_v, H, S(K))$ – некоторые матричные аппроксимирующие функции; * - знак Т-умножения (свертка), а знак $\underline{\overline{\bullet}}$ - знак перехода из области оригиналов в область Д-изображений и наоборот [4].

Шаг 2. Вычисляются матричные дискреты $\overline{S}(K), K = \overline{0,\infty}$ с помощью алгоритма, представленного в работе [2].

Шаг 3. Вычисляются матричные дискреты $R(K)$

$$\overset{\downarrow}{r}_j(K)=\overline{S}(K)*\overset{\downarrow}{a}_j(K)=\sum_{l=0}^{K}\overline{S}(l)\overset{\downarrow}{a}_j(K-l),\ K=\overline{0,\infty},\ j=\overline{1,n}, \tag{20}$$

где $\overset{\downarrow}{r}_j(K)$ и $\overset{\downarrow}{a}_j(K)$ - j-е столбцы матричных дискрет $R(K)$ и $A(K)$.

Шаг 4. Вычисляются матричные дискреты $\overline{R}(K),\ K=\overline{0,\infty}$ также с помощью алгоритма, представленного в работе [2].

Шаг 5. Д-изображениями (B, Q)-обратной матрицы (17) будут

$$\overline{A}(K)=\overline{R}(K)*\overline{S}(K)=\sum_{l=0}^{K}\overline{R}(l)\overline{S}(K-l). \tag{21}$$

Таким образом, имея матричные дискреты (19), в соответствии с некоторым обратным дифференциальным преобразованием $\aleph(\bullet)$ можно восстановить оригинал (B, Q)-обратной матрицы $\overline{A}(t)$.

Модельный пример. Рассмотрим матрицу

$$A(t)=\begin{bmatrix} t+2 & 1 & t+3 & t+1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & t & t+1 & 1-t \end{bmatrix}.$$

Имеем $m=3, n=4$, а ранг матрицы $r=2<m<n$. Вычислим (B, Q)-обратную матрицу. Воспользуемся одноточечными дифференциально-тейлоровскими преобразованиями [5]:

$$X(K)=\frac{H^K}{K!}\cdot\frac{d^K x(t)}{dt^K}\bigg|_{t=t_v=0},\ K=\overline{0,\infty}\ \ \underline{\overline{\bullet}}\ \ x(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_v}{H}\right)^K\cdot X(K).$$

Выберем $H=1, t_v=0$ и $S(t)=\begin{bmatrix} t+2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$

Используя формулы (18), (19) для вычисления матричных дискрет, получим

$$A(0)=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, A(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, A(K)=[0], K=\overline{2,\infty};$$

$$S(0)=\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, S(1)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, S(K)=[0], K=\overline{2,\infty}.$$

Далее, пользуясь алгоритмом, представленным в работе [2], получим следующие матричные дискреты $\overline{S}(t)$:

$$\overline{S}(0)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}, \overline{S}(1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}, \overline{S}(K)=[0], K=\overline{2,\infty}.$$

С помощью формулы (20) получим

$$\overset{\downarrow}{r}_1(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \overset{\downarrow}{r}_1(K)=[0], K=\overline{1,\infty},\ \overset{\downarrow}{r}_2(0)=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \overset{\downarrow}{r}_2(K)=[0], K=\overline{1,\infty},$$

$$\overset{\downarrow}{r}_3(0)=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \overset{\downarrow}{r}_3(K)=[0], K=\overline{1,\infty},\ \overset{\downarrow}{r}_4(0)=\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}, \overset{\downarrow}{r}_4(K)=[0], K=\overline{1,\infty}.$$

Имея матричные дискреты $R(t)$, вычислим матричные дискреты $\overline{R}(t)$ с помощью алгоритма, представленного в работе [2]. Имеем

$$R(0)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix}, R(K)=[0],\ K=\overline{1,\infty};$$

$$\overline{R}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \overline{R}(K)=[0], K=\overline{1,\infty}.$$

И, наконец, используя соотношение (21), получим матричные дискреты (B, Q)-обратной матрицы:

$$\overline{A}(0)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \overline{A}(1)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \overline{A}(K)=[0], K=\overline{2,\infty}.$$

В соответствии с обратными дифференциально-тейлоровскими (маклореновскими) преобразованиями [5] восстановим оригинал (B, Q)-обратной матрицы:

$$\overline{A}(t)=\begin{bmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\ 1 & -\frac{t+2}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Можно легко убедиться, что полученный оригинал точно удовлетворяет условию (3).

Заключение. Предложен достаточно простой численно-аналитический метод определения (B, Q)- параметрических обобщенно-обратных матриц, обладающий высокой вычислительной эффективностью. Метод легко реализуем средствами современных информационных технологий [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Светлаков А.А.** Обобщенные обратные матрицы: некоторые вопросы теории и применения в задачах автоматизации управления процессами. – Томск: Изд-во НТЛ, 2003. – 388 с.
2. **Симонян С.О., Асланян Г.А.** Метод определения параметрических (B)- и (Q)-обобщенно-обратных матриц // Вестник ГИУА. Серия “Информационные технологии, электроника, радиотехника”. – 2013. – Вып. 16, том 2. – С. 33-41.
3. **Ben-Israel A., Greville T. N.E.** Generalized Inverses: Theory and Applications. – NYC: Springer, 2003. – 435 p.
4. **Пухов Г.Е**. Дифференциальные преобразования функций и уравнений. – Киев: Наукова думка, 1984. – 420 с.
5. **Симонян С.О., Аветисян А.Г.** Прикладная теория дифференциальных преобразований. – Ереван: Издательство ГИУА “Чартарагет”, 2010. – 361 с.
6. **Stroustrup B.** The C++ Programming Language, 4th Edition. – Boston: Addison-Wesley Professional, 2013. – 1368 p.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 02.12.2013.

Ս.Հ. ՍԻՄՈՆՅԱՆ, Հ.Ա. ԱՍԼԱՆՅԱՆ

ՊԱՐԱՄԵՏՐԱԿԱՆ (B, Q) ՏԵՍԱԿԻ ԸՆԴՀԱՆՐԱՑՎԱԾ ՀԱԿԱԴԱՐՁ ՄԱՏՐԻՑՆԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԵԹՈԴ

Առաջարկված է (B, Q) տեսակի պարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցների որոշման բավականաչափ պարզ թվաանալիտիկ մեթոդ՝ հիմնված Գ.Ե. Պուխովի դիֆերենցիալ ձևափոխությունների վրա: Դիտարկված է մոդելային օրինակ:

Առանցքային բառեր. պարամետրական ընդհանրացված հակադարձ մատրիցներ, դիֆերենցիալ ձևափոխություններ, տեղեկատվական տեխնոլոգիաներ:

S.H. SIMONYAN, H.A. ASLANYAN

A METHOD FOR DETERMINING (B, Q)- TYPES OF PARAMETRIC GENERALIZED INVERSE MATRICES

A sufficiently simple numerical-analytical method for determining (B, Q)- types of parametric generalized inverse matrices is proposed based on G.E. Pukhov’s differential transforms. A sample example is considered.

Keywords: parametric generalized inverse matrices, differential transforms, information technologies.