

А.А. ТЕРЗЯН, Г.С. СУКИАСЯН<sup>1</sup>, А.Э. АКОПЯН**О СВОЙСТВАХ ВЕКТОРНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИ КОНЕЧНО-  
ЭЛЕМЕНТНОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ТРЕХМЕРНОГО  
МАГНИТНОГО ПОЛЯ**

Исследуется поведение вектора магнитной индукции, полученного при численном решении трехмерных полевых задач методом конечных элементов (МКЭ). Показано, что кулоновская калибровка не является обязательным условием решения трехмерной задачи магнитостатики. Показано также, что из физических соображений необходимо совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции и тангенциальных составляющих вектора напряженности на границах элементов, а также равенство нулю дивергенции вектора магнитной индукции. Доказано, что совпадение нормальных составляющих вектора магнитной индукции на границах элементов имеет место в рамках МКЭ.

**Ключевые слова:** электромагнитное поле, метод конечных элементов, тетраэдрическая сетка.

**Введение.** Решение двумерной задачи магнитостатики является простым по сравнению с трехмерной задачей, так как двумерная задача сводится к скалярным величинам, что приводит к однозначному решению уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial A}{\partial x} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y} \frac{1}{\mu} \frac{\partial A}{\partial y} = -J. \quad (1)$$

В трехмерном случае для того, чтобы уравнение Максвелла привести к уравнению Пуассона, применяют кулоновскую калибровку. Однако в [1] утверждается, что при применении кулоновской калибровки решение трехмерной задачи магнитостатики становится нестабильным.

Рассмотрим подробно кулоновскую калибровку. Представим вектор индукции магнитного поля в виде вихря вектора магнитного потенциала:

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}. \quad (2)$$

Согласно теореме о разложении Гельмгольца, если дивергенция и ротор поля определены в каждой точке  $r$  области  $V$ , то во всей области  $V$  вектор поля можно представить в виде суммы безвихревого и соленоидального полей [2,3].

<sup>1</sup> Работа второго автора осуществлена при поддержке Государственного комитета по науке Республики Армения, грант 11-1A-125.

Т.е. вектор магнитного потенциала можно представить в виде  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \phi$ , значит, для любой скалярной функции  $\phi$   $\vec{B}' = \vec{B}$ , т.к.  $\text{rot}(\text{grad } \phi) = 0$ . Следовательно, имеется множество решений уравнения Максвелла. При решении трехмерной задачи магнитостатики для того, чтобы решение уравнения Максвелла было однозначным, применяется кулоновская калибровка, т.е. в уравнении Максвелла принудительно ставится условие[4-6]:

$$\text{div } \vec{A} = 0.$$

С другой стороны, для того, чтобы решение дифференциального уравнения частных производных было единственным, необходимо применить какое-либо из нижеперечисленных граничных условий[6-9]:

- граничные условия Дирихле - на границе задается значение искомой функции, т.е.  $\varphi = f_1(x, y, z)$ , где  $(x, y, z)$  - декартовы координаты точки, которые принадлежат границе;
- граничные условия Неймана - задается изменение значения искомой функции по нормали границы, т.е.  $\partial\varphi/\partial n = f_2(x, y, z)$ , где  $(x, y, z)$  - декартовы координаты точки, которые принадлежат границе.

Если линии магнитной индукции пересекают поверхность раздела двух участков магнитной цепи, имеющих различные магнитные проницаемости, то на поверхности раздела линии магнитной индукции изменяют свое направление.

Рассмотрим бесконечно малую поверхность abcd на границе раздела двух сред с магнитными проницаемостями  $\mu_1, \mu_2$ , причем  $bc \ll ab$ ,  $bc = ad$ ,  $ab = cd$  (см. рис.)

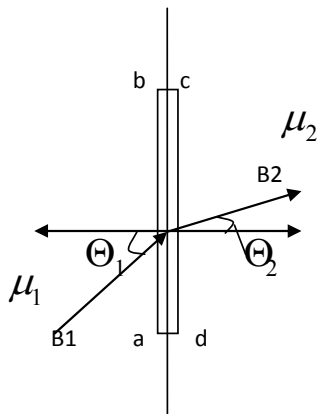


Рис.

Запишем теорему о циркуляции вектора напряженности магнитного поля  $\int_l \vec{H} dl = \sum i$ , где  $i$  - алгебраическая сумма токов, которую охватывает контур  $l$ .

Тогда

$$\int_l H dl = -H_1 \sin(\Theta_1) ab - H_1 \cos(\Theta_1) bc + H_2 \sin(\Theta_2) cd + H_2 \cos(\Theta_2) da. \quad (3)$$

Так как  $bc \ll ab$ , то получаем

$$\int_l H dl = -H_1 \sin(\Theta_1) ab + H_2 \sin(\Theta_2) cd \quad (4)$$

или

$$\int_l \vec{H} dl = \vec{H}_2 \times \vec{n}_2 - \vec{H}_1 \times \vec{n}_1. \quad (5)$$

Следовательно, при отсутствии тока в контуре  $abcd$  тангенциальные составляющие вектора напряженности магнитного поля на границе раздела двух сред равны.

В силу непрерывности магнитного потока  $\oint_s B ds = 0$  получаем

$$\oint_s B ds = B_1 \cdot \cos(\Theta_1) \cdot \Delta s - B_2 \cdot \cos(\Theta_2) \cdot \Delta s = 0. \quad (6)$$

Следовательно, нормальные составляющие вектора магнитной индукции на границе раздела двух сред равны [10-12] (т.е.  $\vec{B}_{1n} = \vec{B}_{2n}$ ).

Исходя из вышеизложенного, необходимо дать математическое обоснование того, что при заданных граничных условиях Дирихле или Неймана в рамках МКЭ хотя векторы индукции в разных элементах и разные, но всегда нормальные (к общей грани) составляющие совпадают.

**Плоский случай.** Предположим, что в треугольнике 123 векторный магнитный потенциал  $A$  меняется линейно. Тогда индукция  $B$  будет постоянной и полностью определяется значениями потенциала  $A$  в вершинах 1, 2 и 3. Обозначим через  $N$  ось, направленную перпендикулярно стороне 12 в правую сторону.

**Теорема 1.** Проекция  $B_N$  вектора индукции на ось  $N$  зависит только от значений  $A_1, A_2$  потенциала  $A$  в вершинах 1, 2 и не зависит от значения  $A_3$ , а именно:

$$B_N = \frac{1}{\rho_{12}} (A_2 - A_1),$$

где  $\rho_{12}$  - длина стороны 12.

*Доказательство.* В треугольнике 123 векторный магнитный потенциал  $A$  линейный и имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^3 A_i b_i(x, y),$$

где  $b_i$  - линейная базисная функция, равная единице в вершине  $i$  и нулю в других вершинах треугольника. Например,  $b_1$  имеет вид

$$b_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix},$$

где  $\Delta$  - площадь треугольника 123. Проекция  $B_x$  вектора индукции на ось абсцисс равна

$$B_x = \frac{\partial A}{\partial y} = \sum_{i=1}^3 A_i \frac{\partial b_i(x, y)}{\partial y} = \frac{1}{2\Delta} [A_1(x_3 - x_2) + A_2(x_1 - x_3) + A_3(x_2 - x_1)]. \quad (7)$$

Аналогично,

$$B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{1}{2\Delta} [A_1(y_3 - y_2) + A_2(y_1 - y_3) + A_3(y_2 - y_1)]. \quad (8)$$

Единичный вектор  $\vec{N}$  по направлению оси  $N$  имеет координаты  $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ , где  $\varphi$  - угол между осями абсцисс и  $N$ . Проекция  $B_N$  вектора индукции  $\vec{B}$  на ось  $N$  равна скалярному произведению  $B_N = (\vec{B} \circ \vec{N}) = B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi$ .

Используя формулы (7) и (8), получим

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} \{A_1[(x_3 - x_2)\cos \varphi + (y_3 - y_2)\sin \varphi] + A_2[(x_1 - x_3)\cos \varphi + (y_1 - y_3)\sin \varphi] + A_3[(x_2 - x_1)\cos \varphi + (y_2 - y_1)\sin \varphi]\}.$$

Обозначив вектор с началом в вершине  $i$  и концом в  $j$  через  $\vec{ij}$ , выразим  $B_N$  через стороны треугольника:

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} [A_1(\vec{23} \cdot \vec{N}) + A_2(\vec{31} \cdot \vec{N}) + A_3(\vec{12} \cdot \vec{N})].$$

Приняв, что  $(\vec{ij} \cdot \vec{N})$  есть длина (со знаком) проекции стороны  $ij$  на ось  $N$ , получим

$$(\vec{23} \cdot \vec{N}) = -h, \quad (\vec{31} \cdot \vec{N}) = +h, \quad (\vec{12} \cdot \vec{N}) = 0,$$

где  $h$  – высота, опущенная из вершины 3 на сторону 12. Таким образом,

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} (A_2 - A_1) h.$$

Остается заметить, что для площади треугольника  $2\Delta = h\rho_{12}$ . Теорема доказана.

Выше предполагалось, что вершины треугольника пронумерованы против часовой стрелки, а ось  $N$  направлена вправо. Если одно из этих условий нарушено, то все формулы сохраняются с точностью до знака.

**Следствие.** В треугольниках, имеющих общую сторону, хотя векторы индукции разные, но всегда нормальные (к общей стороне) составляющие совпадают.

**Трехмерный случай.** Аналог теоремы 1 справедлив и для трехмерного случая. Предположим, что в тетраэдре 1234 векторный магнитный потенциал  $A$  меняется линейно. Тогда индукция  $B$  будет постоянной и полностью определяется значениями потенциала  $A$  в вершинах 1,2,3 и 4. Предположим, что грань 123 лежит в плоскости  $XOY$ . Тогда ось  $OZ$  направлена перпендикулярно грани 123 в правую сторону.

**Теорема 2.** Нормальная составляющая  $B_z$  к грани 123 вектора индукции зависит только от значений  $A_1, A_2, A_3$  потенциала  $A$  в вершинах 1,2,3 и не зависит от значения  $A_4$ , а именно:

$$B_z = \frac{1}{2\Delta} [A_1^y (y_2 - y_3) + A_2^y (y_3 - y_1) + A_3^y (y_1 - y_2)] + \\ + \frac{1}{2\Delta} [A_1^x (x_2 - x_3) + A_2^x (x_3 - x_1) + A_3^x (x_1 - x_2)].$$

*Доказательство.* Имеем

$$B_z = \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y}.$$

Отсюда, в силу равенств (7) и (8), следует теорема 2.

Рассмотрим случай наклонной грани. Пусть перпендикуляр к грани 123 имеет направление  $\vec{N}$ . Рассчитаем нормальную составляющую  $B_N$  к грани 123.

**Теорема 2а.** Для произвольного тетраэдра 1234 нормальная составляющая  $B_N$  вектора индукции к грани 123 зависит только от значений  $A_1, A_2, A_3$  потенциала  $A$  в вершинах 1,2,3 и не зависит от значения  $A_4$ , а именно:

$$B_N = \frac{1}{2\Delta} [A_1^x(x_2 - x_3) + A_2^x(x_3 - x_1) + A_3^x(x_1 - x_2)] + \\ + \frac{1}{2\Delta} [A_1^y(y_2 - y_3) + A_2^y(y_3 - y_1) + A_3^y(y_1 - y_2)] + \\ + \frac{1}{2\Delta} [A_1^z(z_2 - z_3) + A_2^z(z_3 - z_1) + A_3^z(z_1 - z_2)],$$

где  $\Delta$  – площадь треугольника 123.

*Доказательство.* Разложим  $B_N$  на составляющие по координатным осям:

$$B_N = B_x \cos(N, x) + B_y \cos(N, y) + B_z \cos(N, z) = \\ = \left( \frac{\partial A^z}{\partial y} - \frac{\partial A^y}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \frac{\partial A^x}{\partial z} - \frac{\partial A^z}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \left( \frac{\partial A^y}{\partial x} - \frac{\partial A^x}{\partial y} \right) \cos(N, z).$$

В тетраэдре 1234 векторный магнитный потенциал  $A$  линейный и имеет вид

$$A = \sum_{i=1}^4 A_i b_i(x, y, z),$$

где  $b_i$ - трехмерная линейная базисная функция, равная единице в вершине  $i$  и нулю в других вершинах тетраэдра. Например,  $b_1$  имеет вид

$$b_1(x, y, z) = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6V} \begin{vmatrix} x - x_4 & y - y_4 & z - z_4 \\ x_2 - x_4 & y_2 - y_4 & z_2 - z_4 \\ x_3 - x_4 & y_3 - y_4 & z_3 - z_4 \end{vmatrix},$$

где  $V$  – объем тетраэдра 1234. Отсюда следует

$$\frac{\partial b_1}{\partial x} = \frac{1}{6V} [(y_2 - y_4)(z_3 - z_4) - (z_2 - z_4)(y_3 - y_4)],$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial y} = \frac{1}{6V} [(z_2 - z_4)(x_3 - x_4) - (x_2 - x_4)(z_3 - z_4)],$$

$$\frac{\partial b_1}{\partial z} = \frac{1}{6V} [(x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (y_2 - y_4)(x_3 - x_4)].$$

Итак, имеем

$$B_N = \left( \sum_{i=1}^4 A_i^z \frac{\partial b_i}{\partial y} - A_i^y \frac{\partial b_i}{\partial z} \right) \cos(N, x) + \left( \sum_{i=1}^4 A_i^x \frac{\partial b_i}{\partial z} - A_i^z \frac{\partial b_i}{\partial x} \right) \cos(N, y) + \\ + \left( \sum_{i=1}^4 A_i^y \frac{\partial b_i}{\partial x} - A_i^x \frac{\partial b_i}{\partial y} \right) \cos(N, z).$$

Заметим, что для объема тетраэдра имеет место  $6V = 2\Delta h_N$ , где  $\Delta$  – площадь треугольника 123;  $h_N$  – высота, опущенная из вершины 4 на грань 123 и имеющая направление  $\vec{N}$ . Следовательно,

$$2\Delta B_N = \sum_{i=1}^4 (A_i^x c_{ix} + A_i^y c_{iy} + A_i^z c_{iz}),$$

где

$$c_{ix} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial z} \cos(N, y) - \frac{\partial b_i}{\partial y} \cos(N, z) \right),$$

$$c_{iy} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial x} \cos(N, z) - \frac{\partial b_i}{\partial z} \cos(N, x) \right),$$

$$c_{iz} = 2\Delta \left( \frac{\partial b_i}{\partial y} \cos(N, x) - \frac{\partial b_i}{\partial x} \cos(N, y) \right).$$

Например, для  $c_{ix}$  имеем

$$c_{ix} = \frac{2\Delta}{6V} \left\{ [(x_2 - x_4)(y_3 - y_4) - (y_2 - y_4)(x_3 - x_4)] \cos(N, y) + \right. \\ \left. + [(x_2 - x_4)(z_3 - z_4) - (z_2 - z_4)(x_3 - x_4)] \cos(N, z) \right\} = x_3 - x_2.$$

Аналогичным образом рассчитав остальные коэффициенты, получим

$$2\Delta \cdot B_N = A_1^x (x_2 - x_3) + A_2^x (x_3 - x_1) + A_3^x (x_1 - x_2) + \\ + A_1^y (y_2 - y_3) + A_2^y (y_3 - y_1) + A_3^y (y_1 - y_2) + \\ + A_1^z (z_2 - z_3) + A_2^z (z_3 - z_1) + A_3^z (z_1 - z_2).$$

Теорема доказана.

**Следствие.** В тетраэдрах, имеющих общую грань, хотя векторы индукции разные, но всегда нормальные (к общей грани) составляющие совпадают.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Biro O., Preis K., Richter K.R.** On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3D magnetostatic problems // IEEE. Trans. Magn. - 1996. - Vol. 32. - P. 651-654.
2. **Арфкен Г.** Математические методы в физике. – М.: Атомиздат, 1970.- 712 с.
3. **Корн Г., Корн Т.** Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.- 831 с.
4. **Нейман Л.Р., Калантаров П.Л.** Теоретические основы электротехники. Т. 3. – М.: Госэнергоиздат, 1959. -231 с.
5. **Макаров А.М., Лунева Л.А.** Основы электромагнетизма: Электронный учебник. Т.3. – М.: Изд-во МГТУ им Н.Э. Баумана, 2002.-154 с.
6. **Самарский А.А.** Теория разностных схем. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 616 с.
7. **Соболев С.Л.** Уравнения математической физики. – М.: Гос. изд. техн.–теор. лит., 1954.- 444 с.
8. **Курант Р., Гильберт Д.** Методы математической физики. Т.1. – М.: Изд-во ГТТИ, 1933. – 525 с.
9. **Михлин С.Г.** Курс математической физики. 2-е изд. - СПб.: Изд-во “Лань”, 2002.- 576 с.
10. **Бинс К., Лауренсон П.** Анализ и расчет электрических и магнитных полей - М.: Энергия, 1970. - 374 с.
11. **Демирчян К.С., Нейман Л.Р., Коровкин Н.В., Чечурин В.Л.** Теоретические основы электротехники. Т.3. -4-е изд. - СПб.: Питер, 2003.- 377 с.
12. **Сивухин Д. В.** Общий курс физики: Учеб.пособие для вузов. В 5 т. Т. 3. Электричество. - 4-е изд., стереот. - М.: Физматлит, 2004. - 656 с.

ГИУА (ПОЛИТЕХНИК). Материал поступил в редакцию 10.04.2012.

### Հ.Ա. ԹԵՐՁՅԱՆ, Հ.Ս. ՍՈՒՔԻԱՍՅԱՆ, Ա.Է. ՀԱՎՈՐՅԱՆ

#### ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՏԱՐԲԵՐՈՎ ԵՌԱԶՍՓ ՄԱԳՆԻՍՏԱԿԱՆ ԴԱՇՏՁ ՄՈՂԵԼԱՎՈՐԵԼԻՍ ՎԵՎՏՈՐԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՀԱՏՎՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Հետազոտվում է ստացված մագնիսակա հինդուկցիայի վեկտորի վարքը վերջավոր տարրերի մեթոդով եռաչափ դաշտային խնդիրների թվային լուծման ընթացքում: Ցույց է տրված, որ եռաչափ մագնիսաստատիկ խնդիրների լուծման դեպքում կուլոնյան ձևափոխությունը պարտադիր պայման չէ: Ելնելով ֆիզիկական նկատառումներից, անհրաժեշտ է, որ մագնիսական հինդուկցիայի դիվերգենցիան հավասար լինի զրոյի, մագնիսական հինդուկցիայի վեկտորի նորմալ բաղադրիչը և մագնիսական դաշտի լարվածության տանգենցիալ բաղադրիչը համընկնեն տարրերի սահմանին: Ապացուցված է, որ վերջավոր տարրերի մեթոդը կիրառելիս հարևան տարրերի մագնիսական հինդուկցիայի վեկտորի նորմալ բաղադրիչները հավասարեն:

**Առանցքայինըստեր.** Էլեկտրամագնիսական դաշտ, վերջավոր տարրերի մեթոդ, քառանիստ ցանց:



**H. A. TERZIAN, H. S. SUKIASYAN, A. E. HAKOBYAN**

**ON THE PROPERTIES OF VECTOR CHARACTERISTICS AT FINITE ELEMENT  
MODELING OF THREE-DIMENSIONAL MAGNETIC FIELD**

The behavior of the magnetic induction produced in the numerical solution of three-dimensional field problems by finite element method (FEM) is researched. It is shown that the Coulomb gauge is not necessary for three-dimensional magnetostatic problem. It is also shown that from physical considerations, the normal components of the magnetic induction and the tangential component of tension on the boundaries of the elements must coincide. Also, the divergence of the magnetic induction must vanish. The coincidence of the normal components of the magnetic induction on the boundaries of the elements in the framework of the finite element method is proved.

**Keywords:** electromagnetic field, finite element method, tetrahedral mesh.