

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Д. С. МЕЛКОНЯН, А. А. ГАЗАРЯН

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК  
ПО НЕРАВНООТСТОЯЩИМ ОТСЧЕТАМ КРИВОЙ  
ПЕРЕХОДНОГО ПРОЦЕССА

В ряде случаев эффективным средством сокращения избыточности исходных данных цифрового спектрального анализа переходных процессов является введение неравномерного шага дискретизации, при котором отсчеты анализируемого процесса берутся в точках, расположенных по закону геометрической прогрессии [1, 2]. В настоящей работе предлагается новый метод спектрального анализа дискретизированных функций времени, особенностью которого является использование способа кусочно-линейной аппроксимации преобразуемой функции с разложением аппроксимирующей кривой на сумму сдвинутых во времени неравнобедренных треугольников.

**Метод.** Пусть  $h(t)$  — исходная функция времени, описывающая анализируемый процесс, которая задана своими дискретными значениями  $h(t_k)$  ( $k = 0, 1, \dots, N$ ) в точках

$$t_k = t_0 \cdot c^k, \quad (1)$$

где  $t_0$  — точка, в которой берется первый отсчет ( $t_0 \neq 0$ );  $c > 1$  — показатель геометрической прогрессии, определяющий скорость возрастания интервалов между последовательными отсчетами.

Для приближенного расчета спектральных характеристик функция  $h(t)$  аппроксимируется кусочно-ломаной кривой, состоящей из отрезков прямых, сопрягающихся в точках  $h(t_k)$ . При этом способе аппроксимации, в предположении, что  $h(0) = 0$ , функция  $h(t)$  может быть представлена в виде

$$h(t) \approx \sum_{k=0}^{N-1} h(t_k) \varphi_k(t - t_k) + h(t_N) \eta_N(t - t_N), \quad (2)$$

где правая часть уравнения является аналитическим выражением аппроксимирующей кривой, а  $\varphi_k(t)$  и  $\eta_N(t)$  — функции, определяемые следующими равенствами

$$\begin{cases} \varphi_k(t) = 0, & \text{при } t > \Delta t_{k+1}, \\ \varphi_k(t) = 0, & \text{при } t < \Delta t_k, \end{cases} \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_k(t) = 1 - \frac{t}{\Delta t_{k+1}}, \quad \text{при } 0 < t \leq \Delta t_{k+1}, \\ \varphi_k(t) = 1 + \frac{t}{\Delta t_k}, \quad \text{при } \Delta t_k \leq t \leq 0; \\ \eta_N(t) = 0, \quad \text{при } t > 0, \\ \eta_N(t) = 0, \quad \text{при } t < \Delta t_N, \\ \eta_N(t) = 1 + \frac{t}{\Delta t_N}, \quad \text{при } \Delta t_N \leq t \leq 0, \end{array} \right. \quad (4)$$

где

$$\Delta t_k = t_k - t_{k-1} = t_0 c^{k-1} (c - 1). \quad (5)$$

Представление аппроксимирующей функции в виде суммы неравнобедренных треугольников  $\varphi_k(t)$  и прямоугольного треугольника  $\eta_N(t)$  согласно уравнению (2) иллюстрируется на рис. 1.

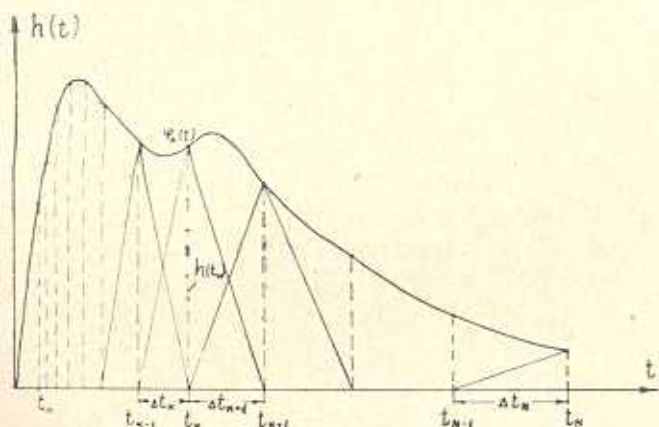


Рис. 1. Представление аппроксимирующей функции в виде неравнобедренных треугольников.

Для получения приближенного выражения комплексного частотного спектра функции  $h(t)$ , определяемого формулой

$$H(j\omega) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (6)$$

необходимо в выражении (6) вместо функции подставить ее приближенное выражение (2). Получаем

$$H(j\omega) \approx \sum_{k=0}^{N-1} h(t_k) \varphi_k(j\omega) e^{-j\omega t_k} + h(t_N) \eta_N(j\omega) e^{-j\omega t_N}, \quad (7)$$

где  $\varphi_k(j\omega)$  и  $\eta_N(j\omega)$  — комплексные спектры функций  $\varphi_k(t)$  и  $\eta_N(t)$ . Расчетные выражения для  $\varphi_k(j\omega)$ , представляющей собой ком-

плексный спектр неравностороннего треугольника, после ряда преобразований, приводится к виду

$$\varphi_k(j\omega) = \frac{1 + c - c \cdot \cos \omega \Delta t_k - \cos c\omega \Delta t_k}{\omega^2 c \Delta t_k} + j \frac{\sin c\omega \Delta t_k - c \cdot \sin \omega \Delta t_k}{\omega^2 c \Delta t_k}. \quad (8)$$

Комплексный спектр функции  $\eta_N(t)$  выражается формулой

$$\eta_N(j\omega) = \frac{1 - \cos \omega \Delta t_N}{\omega^2 \Delta t_N} + \frac{j}{\omega} \left( 1 - \frac{\sin \omega \Delta t_N}{\omega \Delta t_N} \right). \quad (9)$$

Таким образом, вычисление частотных спектров функции  $h(t)$ , заданной в экспоненциально распределенных точках, с использованием кусочно-линейной аппроксимации, сводится к расчету спектров неравносторонних треугольников с вершинами в точках  $h(t_k)$  и суммированием их согласно формуле (7).

На основе разработанного метода построен алгоритм расчета частотных спектров для логарифмических шкал частот. Он построен таким образом, чтобы избежать повторения вычислений некоторых из членов, входящих в формулу (7). С этой целью введен треугольник  $\psi(t)$ , высота которого делит основание на части, равные 1 и  $c$  (рис. 2а).

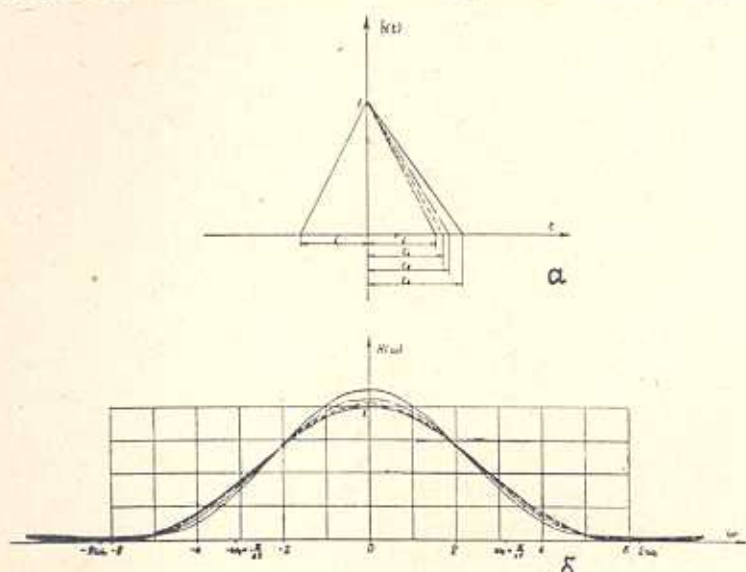


Рис. 2. а — типовые неравносторонние треугольники с различными значениями параметра  $c$ ; б — амплитудные спектры соответствующих треугольников.

Можно записать следующие соотношения

$$\begin{cases} \varphi_0(t) = \psi\left(\frac{c}{\Delta t_0}\right), \\ \dots \dots \dots \\ \varphi_k(t) = \psi\left(\frac{t}{c^k \Delta t_0}\right), \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\Delta t_0 = t_0 \left(1 - \frac{1}{c}\right). \quad (11)$$

Пусть  $\psi(j\omega)$  — частотный спектр функции  $\psi(t)$ , тогда может быть записано соотношение

$$\varphi_k(j\omega) = c^k \Delta t_0 \psi_0(c^k \Delta t_0 j\omega). \quad (12)$$

Если вычислять функцию  $H(j\omega)$  для дискретного ряда частот

$$\omega_i = \omega_0 c^i, \quad (13)$$

то, с учетом (12), выражение (7) запишется в виде

$$H(j\omega_i) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k c^k \Delta t_0 \psi_0(c^k \Delta t_0 j\omega_i) e^{-j\omega_i t_N} + \\ + h(t_N) \varphi_N(c^{N+1} \Delta t_0 j\omega_0) e^{j-\omega_i t_N}. \quad (14)$$

На основе разработанного алгоритма записаны программы расчетов на языках программирования АП ЭВМ семейства «Наири» и ФОРТРАН-IV. Расчеты производились на ЭВМ «Наири-2» и ЕС-1030, соответственно.

В качестве исходной информации в ЭВМ вводятся следующие исходные данные: 1) значение  $t_0$  — точки, в которой берется первый отсчет; 2) число неравноотстоящих ординат исходной функции; 3) тип исследуемой кривой; 4) значения ординат  $h_k$  и 5) число точек на декаду, соответствующее определенному значению  $c$ , которое выбирается, исходя из следующих соображений. При представлении функции  $h(t)$  в логарифмических шкалах, шаг дискретизации определяется числом отсчетов, приходящих на декаду. При дискретизации исходной функции с шагом, соответствующим заданию  $n$  точек на декаду, выполняется соотношение  $c^n = 10$ , откуда  $c = \sqrt[n]{10}$ .

При  $n = 10$  точек на декаду —  $c = 1,258925497$ ,  $n = 20$  —  $c = 1,122018486$ ,  $n = 40$  —  $c = 1,059253737$ .

Проведенные расчеты показали, что при шаге дискретизации, соответствующем заданию 20 точек на декаду, обеспечивается достаточно высокая точность расчетов.

На рис. 26 показаны амплитудные спектры неравнобедренных треугольников, рассчитанные для различных значений  $c$ , которые выбираются в соответствии с  $n = 10$  (пунктирная кривая), 20 (штрих-пунктирная) и 40 точкам на декаду (сплошная кривая). Как видно из рисунка, спектры рассматриваемых треугольников, также как и амплитудный спектр равнобедренного треугольника (точечная кривая на рис. 26), не имеет ограничения по частоте, что позволяет вычислять спектры исследуемых функций в значительных диапазонах их изменения.

Эффективность разработанного метода и вычислительного алго-

ритма была определена путем сравнения аналитических спектров со спектрами, вычисленными согласно разработанному алгоритму и алгоритму, использующему равномерные отсчеты исходной функции. На ряде типовых примеров показано, что алгоритм расчета частотных спектров по экспоненциально распределенным отсчетам по сравнению с алгоритмами, использующими равномерные отсчеты преобразуемой функции, использует значительно меньшее число отсчетов — избыточность данных сокращается, в среднем в 6—12 раз, что способствует сокращению времени машинных расчетов.

**Пример расчета.** Рассмотрим импульсную переходную функцию системы управления зрачковым рефлексом  $h_0(t)$ , полученную на основе экспериментальных данных.

На рис. 3а показаны: а) исходная функция  $h_0(t)$ , дискретизированная по неравноотстоящим отсчетам; б) соответствующие кривые ампли-

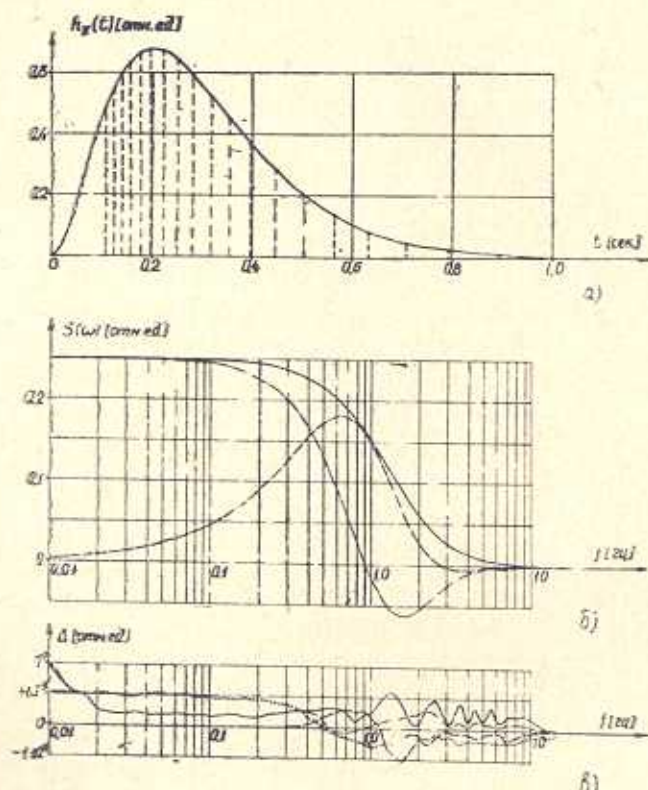


Рис. 3. а — дискретизация исходной функции по неравноотстоящим отсчетам; б — частотные спектры функции  $h_0(t)$ ; в — соответствующие кривые ошибок расчета спектров.

тудного (сплошная), вещественного (штрих-пунктирная) и мнимого (пунктирная) спектров, представленные в логарифмической шкале частот в диапазоне от 0,01 до 10 Гц; в) соответствующие кривые ошибок, где точечная кривая отображает ошибки расчета согласно алгоритму по равноотстоящим отсчетам.

Используемое число ординат равно 40 — для алгоритма по неравноотстоящим отсчетам и 240 — алгоритма по равноотстоящим отсчетам.

### Выводы

Разработан метод цифрового спектрального анализа, особенностями которого являются: 1) задание исходной информации для расчетов в виде значений преобразуемой функции в конечном множестве точек, расположенных по закону возрастающей геометрической прогрессии; 2) использование способа кусочно-линейной аппроксимации преобразуемой функции с разложением аппроксимируемой кривой на сумму сдвинутых во времени неравнобедренных треугольников.

На этой основе построен алгоритм цифрового спектрального анализа, эффективный с точки зрения сокращения избыточности данных, используемых для машинной обработки. Логарифмические шкалы, для которых производятся расчеты частотных спектров, позволяют охватывать значительные диапазоны их задания. На численном примере проиллюстрирована высокая точность расчетного алгоритма и его эффективность в отношении сокращения избыточности данных.

Расчетные формулы разработанного метода и построенного на его основе алгоритма сравнительно просты и удобны для программной реализации.

Инст. физиологии  
АН АрмССР

Поступило 13.VI.1979

Գ. Ս. ԲԵԼՈՒՅԱՆ, Ա. Ա. ՉԱՉԱՐՅԱՆ

ՀԱՃԱՆԱԿԱՆ ԲՆՈՒԹԱԳՐԵՐԻ ՀԱՇՎԱՐԿՄԱՆ ԹՎԱՅԻՆ ՄԵԹՈԴ  
ԱՆՅՈՂԻԿ ՊՐՈՅԵՍԻ ԿՈՐԻ ԱՆՀԱՎԱՍՍԱՐԱԶԱՏ ՀԱՇՎՈՒՄԵՐՈՎ

### Ա մ փ ո փ ո ս մ

Առաջարկվում է անցողիկ պրոցեսների հաճախական բնութագրերի հաշվարկման նոր մեթոդ, որի առանձնահատկությունը կայանում է ելման կորի կտոր-զծային մոտարկման եղանակի օգտագործումը և նրա անհավասարազատ հաշվումների կիրառումը, որոնք ենթարկվում են աճող երկրաչափական պրոցրեսիայի օրենքին:

Մշակման մեթոդը և նրա հիմքի վրա կառուցված հաշվողական ալգորիթմը լոգարիթմական ցուցանակի համար հանդիսանում են ավելցուկ ելային ավյալների կրճատման էֆեկտիվ միջոց:

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Мелконян Д. С. Метод аппроксимации динамических характеристик экспоненциально-синусоидальными функциями. «Известия АН АрмССР (серия Т.Н.)», т. XXII, № 5, 1969.
2. Helms D. D. Power Spectra Obtained from Exponentially Increasing Spacings of Sampling Positions and Frequencies. IEEE Trans. Acoustics, Speech and Signal Processing, v. ASSP-24, № 1, Fedr. 1976, 63-71.