

СТРОИТЕЛЬНЫЕ КОНСТРУКЦИИ

Ю. А. ГАСПАРЯН

РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ЩЕЛЕВИДНОГО
 АКУСТИЧЕСКОГО ЭЛЕМЕНТА, НАГРУЖЕННОГО
 ИМПЕДАНСОМ

Теорию распространения плоских (однородных) звуковых волн в волноводах можно применить для щелевидных акустических элементов, рассмотренных в [1—5]. Пусть плоская звуковая волна падает нормально со стороны щели на акустический элемент. Рассмотрим импедансы, вызываемые реакцией звукового поля на лицевую стенку и щель. Вблизи переходной части щели плоский характер движения волны будет нарушен и характеризуется входным импедансом щели $Z_{щ}$. Другая часть звуковой волны проходит одновременно через верхний и нижний звукопоглощающие слои передней стенки и характеризуется входным нормальным импедансом лицевой стенки звукопоглощающего слоя Z_1 с известным импедансом задней стенки $Z_{вх}$. И, наконец, пройдя воздушную полость, последняя часть звуковой волны будет проходить через второй звукопоглощающий слой и характеризуется входным импедансом $Z_{вх_1}$ с известным импедансом задней стенки (рис. 1а, б).

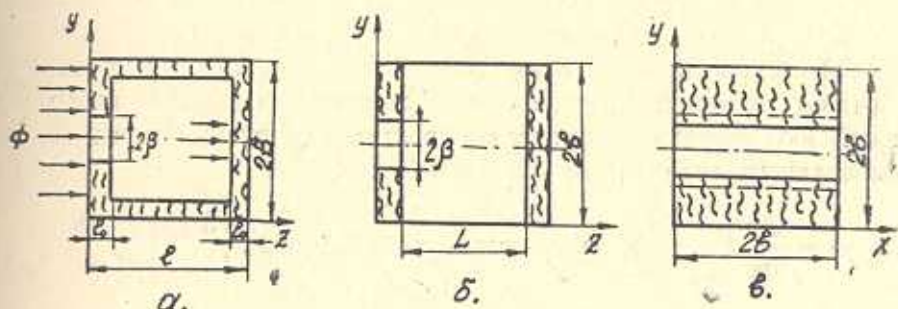


Рис. 1. Поперечные разрезы объемного акустического элемента.

Входной импеданс системы акустического элемента, выражаемый в виде проводимости и определяемый от второй стенки звукопоглощающего слоя в сторону щели, равен:

$$Z_1 = S_{ст} W \frac{Z_{вх} S_{щ} W + P_{вх} \operatorname{cth}(\gamma l_0)}{Z_{вх} \operatorname{cth}(\gamma l_0) + Z_{вх_1} S_{щ} W} \quad (1)$$

где

$$Z_{ax_2} = S_{cr} W \frac{S_{cr} W - j S_{in} W_0 \operatorname{cth}(\gamma l_0) \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}{S_{in} W_0 \operatorname{cth}(\gamma l_0) - j S_{cr} W \operatorname{ctg}\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right)}; \quad Z_{in} = \frac{Z_{in} Z_{ax_1}}{Z_{ax_1} + 2Z_{in}};$$

$$Z_{ax_1} = S_{cr} W \frac{S_{cr} W + Z_{ax_2} \operatorname{cth}(\gamma l_0)}{S_{cr} W \operatorname{cth}(\gamma l_0) + Z_{ax_2}}.$$

Как видно из формулы (1), неизвестным является входной импеданс щели Z_{in} акустического элемента (рис. 1а). Задачу будем решать в трехмерной системе координат. Пусть плоская звуковая волна падает со стороны полупространства на акустический элемент (примем для упрощения без верхней и нижней стенки — рис. 1в) и образует в щели звуковое поле, характеризующееся суммой бегущих нормальных волн. Потенциал скоростей падающей нормально на лицевую стенку и отраженной звуковой волны определяется решением волнового уравнения, которое будем искать в виде:

$$\Phi(x, y, z, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (A_{mn} e^{-jk_p z} + B_{mn} e^{jk_p z}) \cos k_m x \cos k_n y e^{j\omega t}, \quad (2)$$

где A_{mn} , B_{mn} — неизвестные коэффициенты (постоянные интегрирования), определяемые граничными условиями; $k_m = \frac{\pi m}{2b}$; $k_n = \frac{\pi n}{2b}$;

$k^2 = k_m^2 + k_n^2 + k_p^2$; $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$; k_m , k_n , k_p — волновые числа колебаний поперек и вдоль осей x , y , z и падающей на лицевую сторону акустического элемента звуковой волны в пространстве и щели; k — волновой вектор; λ — длина звуковой волны; c — скорость звука.

Под действием падающей звуковой волны возникают колебания лицевой стенки элемента с амплитудой скорости U_1 , а в щели — U_0 . Распишем значения распределения скоростей в щели и на лицевой стороне акустического элемента по собственным функциям задачи, воспользовавшись граничными условиями:

$$U(x, y) = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{mn} \cos k_m x \cos k_n y = U_0 \begin{cases} 0 < x < 2b, \\ b - \beta < y < b + \beta, \end{cases} \quad (3)$$

где
$$\alpha_{mn} = \frac{v_{mn} U_0}{S_{cr}} \int_0^{2b} \int_{b-\beta}^{b+\beta} \cos k_m x \cos k_n y dx dy,$$

а временной множитель $\exp(j\omega t)$ из (2) опускается;

$$U(x, y, l_0) = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=l_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{mn} \cos k_m x \cos k_n y =$$

$$= U_p \begin{cases} 0 < y < b - \beta, \\ b + \beta < y < 2b, \end{cases}$$

$$\beta_{mn} = \frac{U_{mn} U_{l_0}}{S_{\text{ст}}} \left[\int_0^{2b} \int_{\beta}^{b-\beta} \cos k_m x \cos k_n y dy dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^{2b} \int_0^{\beta} \cos k_m x \cos k_n y dx dy \right]. \quad (4)$$

В (3) и (4) $v_{mn} = 4$ при $m \neq 0, n \neq 0, v_{0n} = a_{0n} = 2$, при $m \neq 0, n = 0$ или $m = 0, n \neq 0, v_{00} = 1$, при $m = n = 0$; откуда

$$a_{mn} = a_{0n} = \frac{2U_0 S_m}{S_{\text{ст}}} F_n(\eta) = 2U_0 \eta F_n(\eta);$$

$$\beta_{mn} = \beta_{0n} = \frac{2U_l (S_{\text{ст}} - S_m)}{S_{\text{ст}}} F_n(1 - \eta); \quad \eta = \frac{2\beta}{2b},$$

где

$$F_n(\eta) = \frac{\sin \pi n \eta}{\pi n \eta}; \quad F_n(1 - \eta) = \frac{\sin \pi n (1 - \eta)}{\pi n (1 - \eta)};$$

$$n = \frac{n_1}{2} \quad (n_1 = 2, 4, 6, 8, \dots); \quad n = \frac{n_2}{L} \quad (n_2 = 4, 8, 12, \dots);$$

$$(1 - \eta) = t \quad \text{при } \eta \rightarrow 1, \quad t \rightarrow 0.$$

Тогда:

$$U(x, y) \Big|_{z=0} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = jk_p \sum_{n=1}^{\infty} (A_{0n} - B_{0n}) \cos k_n y = U_0 D_1; \quad (5)$$

$$U(x, y) \Big|_{z=l_0} = - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=l_0} = jk_p \sum_{n=1}^{\infty} (A_{0n} e^{-jk_p l_0} - B_{0n} e^{jk_p l_0}) \cos k_n y = U_l D_1.$$

После некоторых преобразований получим следующие выражения для коэффициентов A_{0n} и B_{0n} :

$$A_{0n} = \frac{D_1 (U_0 e^{jk_p l_0} - U_l)}{2jk_p \text{sh}(k_p l_0)}; \quad B_{0n} = \frac{D_1 (U_0 e^{-jk_p l_0} - U_l)}{2jk_p \text{sh}(k_p l_0)}, \quad (6)$$

где

$$D_1 = \frac{2S_m F_n(\eta)}{S_{\text{ст}}}. \quad (7)$$

В выражение (6) входит неизвестная величина U_l . Рассмотрим силу звукового давления, действующей в щели и на лицевую стенку, которая равна

$$\Psi(x, y, l_0, t) = \int_0^{2b} \int_0^{b+\frac{\delta}{2}} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy + \int_0^{2b} \int_{b+\frac{\delta}{2}}^{2b} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy + \\ + \int_0^{2b} \int_0^{b-\frac{\delta}{2}} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial t} dx dy. \quad (8)$$

Учитывая, что та же сила равна $\Psi_l = Z_l U_l$ и произведя вычисления интеграла, получим уравнения для определения скоростей звуковой волны на лицевой и задней стенках:

$$U_{l_1} = \frac{U_0 D_2}{jk_p \operatorname{sh}(k_p l) Z_l + D_2 \operatorname{ch}(jk_p l)}; \quad (9)$$

$$U_{l_2} = \frac{U_0 E_2}{jk_p \operatorname{sh}(k_p l) Z_l + E_2 \operatorname{ch}(jk_p l)},$$

где

$$E_2 = \frac{2W(S_{cr} - S_m) S_m}{S_{cr}} F_n^2 (1 - \gamma); \quad D_2 = \frac{2W S_m^2}{S_{cr}} F_n^2 (\gamma).$$

Решая совместно (7)–(9), получим окончательные выражения A_{on} и B_{on} для высших и нулевых мод в зависимости от U_0 , Z_l и параметров акустического элемента:

$$A_{on} + B_{on} = \frac{U_0 D_2}{jk_p} \frac{Z_l W \operatorname{cth}(k_p l_0) + j \frac{k W}{jk_p}}{j_l W + j \frac{k W}{jk_p} \operatorname{cth}(k_p l_0)}; \quad (10)$$

$$A_{on'} + B_{on'} = \frac{U_0 E_2}{jk_p} \frac{Z_l \operatorname{cth}(k_p l) + i W}{W \operatorname{cth}(k_p l_0) + j Z_l}; \quad (11)$$

$$A_{c0} + B_{c0} = \frac{U_0 \gamma}{jk_p} \frac{W_0 + W}{W_0 - W} \operatorname{cth}(k_p l_0). \quad (12)$$

Для случая распространения нулевых и затухающих мод высших порядков, т. е. когда $k < k_n$, имеем

$$jk_p \sqrt{k_n^2 - k^2} = k_n \sqrt{1 - \left(\frac{k}{k_n}\right)^2} = k_n \alpha.$$

Следовательно, при определении импеданса звукопоглощающей лицевой стенки с щелью следует проинтегрировать согласно граничным условиям и разделить полученную суммарную силу на U_0 . Окончательно приходим к выражению:

$$\begin{aligned}
Z_m = S_m W_0 \gamma \frac{W_0 + W}{W_0 - W} \operatorname{cth}(\gamma l_0) + 2jW \frac{S_m^2}{S_{cr}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^2(\gamma)}{jk_p} \times \\
\times \frac{Z_l W \operatorname{cth}(k_p l_0) + j \frac{kW}{jk_p}}{Z_l W + j \frac{kW}{jk_p} \operatorname{cth}(k_p l_0)} + 2jW \gamma \frac{(S_{cr} - S_m) S_m}{S_{cr}} \times \\
\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(1 - \gamma)}{jk_p} \frac{Z_l \operatorname{cth}(k_p l_0) + jW}{W \operatorname{cth}(k_p l_0) + jZ_l} + jW \gamma \frac{S_{pn}^2}{S_m} (l_0 + 2\delta_l). \quad (13)
\end{aligned}$$

Здесь $W = W_a + jW_i$, $W_0 = \rho_0 c_0$ — соответственно, волновые сопротивления звукопоглощающего материала и воздуха; $\gamma = \alpha + j\beta_1$ — постоянная распространения, $1/\text{см}$; α — показатель затухания в среде волокнистого материала и $\beta_1 = 2\pi f/c$, $1/\text{см}$.

В выражении (13) первые два члена представляют импеданс звукопоглощающей стенки и щели, получаемый за счет взаимодействия поршней S_{cr} и S_m , вследствие наложения их ближних звуковых полей. Третий член является выражением переносного импеданса в точке приложения силы звукового давления, а четвертый член — импедансом воздушной пробки щели с присоединенной массой с обеих сторон. При переходе звуковой волны из щели в резонирующую полость образуется скачок, приводящий к возникновению присоединенной массы $M \left(\frac{S_{pn}}{S_m} \right)^2$, где $S_{pn} = 2bL$. Строгая оценка величины концевых двухсторонних поправок для заданной геометрии весьма затруднительна. Здесь возникает необходимость решения дифференциальной задачи, касающейся прохождения звуковых колебаний щели элемента, отличающийся формой и геометрией полости. При продольном раскрытии щели акустического элемента, если она симметрична, сохраняя в решении моды высшего порядка и при $\theta = 0$, получается второе приближение. Тогда двухсторонняя поправка, согласно рекомендациям [2, 4], равна:

$$\begin{aligned}
2\delta_l = 4b' \lambda^{-1} \left[\frac{\delta_2 (1 - S^2)}{(1 + \delta_1 S)^2 (1 + \delta_2 S^4)} - \ln S \right]; \\
\delta_n = 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2bk}{\pi m} \right)^2}; \quad S = \sin \left(\frac{\pi n}{2b} \right); \quad b' = 2b.
\end{aligned}$$

Учитывая присоединенную массу щели, связанную с концевой поправкой, с учетом толщины l_0 и воздушного промежутка L , который расположен за передней стенкой акустического элемента, получим:

$$2\delta_l = - \frac{2\beta_1}{\pi S_m \rho_0} \frac{k}{\gamma} \left\{ \ln \left[\sin \left(\frac{\pi \eta}{2} \right) \right] \right\} + W_0 \operatorname{ctg} \left(\frac{2\pi L}{\lambda} \right). \quad (14)$$

Введем переменные и обозначения $\beta/\lambda = D$, $b/\lambda = d$, $l/\lambda = h$, $L/\lambda = H$, получим:

$$k_{n\alpha} l_0 = \frac{\pi n \gamma h}{2D} \sqrt{1 - \left(\frac{4D}{n\gamma}\right)^2}; \quad \frac{k}{k_{n\alpha}} = \frac{4d}{n \sqrt{1 - \left(\frac{4d}{n}\right)^2}} = A$$

или

$$k_{n\alpha} = \frac{K}{A} = \frac{2\pi}{\lambda A}, \quad k_{n\alpha} l_0 = \frac{\pi n h}{2d} \sqrt{1 - \left(\frac{4d}{n}\right)^2}.$$

Тогда $Z_{\text{вх}}$ можно выразить в зависимости от R и Y при заданных D , d , h и λ . Согласно рекомендациям [2, 3] и на основании формулы (13) имеем, что реактивная часть импеданса звукопоглощающей стенки с щелью равна:

$$Z_j = 2j\gamma W \frac{S_{\text{ш}}^2}{S_{\text{ст}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{k_{n\alpha}} Q_{r_n} + 2l\gamma W \frac{(S_{\text{ст}} - S_{\text{ш}}) S_{\text{ш}}}{S_{\text{ст}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(1-\eta)}{k_{n\alpha}} Q_{r_n}, \quad (15)$$

где

$$Q_{r_n} = \frac{[(RW)^2 + (YW)^2 + (AW_0)^2] \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda}\right) + YAWW_0 \left[1 + \operatorname{cth}^2\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right]}{(RW)^2 + \left|YW + AW_0 \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right|^2}; \quad (16)$$

$$Q_{r_s} = \frac{(W^2 - R^2 - Y^2) \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right) + YW \left[\operatorname{cth}^2\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right]^2}{R^2 + \left|W \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right) - Y\right|^2}.$$

Действительная часть импеданса определяется из соотношения

$$Z_r = - \left[2jW \frac{S_{\text{ш}}^2}{S_{\text{ст}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(\eta)}{k_{n\alpha}} Q_{j_n} + 2jW \frac{(S_{\text{ст}} + S_{\text{ш}}) S_{\text{ш}}}{S_{\text{ст}}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n^2(1-\eta)}{k_{n\alpha}} Q_{j_n} \right], \quad (17)$$

где

$$Q_{j_n} = \frac{RAWW_0 \left[1 - \operatorname{cth}^2\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right]}{(RW^2) + \left|YW + AW_0 \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right|^2}; \quad (18)$$

$$Q_{j_s} = \frac{RW \left[H \operatorname{cth}^2\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right)\right]}{R^2 + \left|W \operatorname{cth}\left(\frac{2\pi l_0}{\lambda A}\right) - Y\right|^2}.$$

Однако из выражения $\sqrt{n^2 - (4d)^2}$ вытекает, что n может принимать только значения $n > 4d$. Отметим, что в случае частот $f < 630$ Гц, подкоренное выражение верно при $|n^2 - (4d)^2|$.

Для нулевой моды удельный акустический импеданс будет:

$$\frac{Z_{0r} + jZ_{0j}}{S_{ст} W_0 \eta} = Q_0, \quad (19)$$

где

$$Q_0 = W \frac{RW[1 + \text{ctg}^2(\gamma l_0)] + j(W^2 - Y^2 - R^2) \text{ctg}(\gamma l_0) + jYW[\text{ctg}^2(\gamma l_0) - 1]}{R^2 + [W \text{ctg}(\gamma l_0) - Y]^2}. \quad (20)$$

Полный входной импеданс со стенками из материалов с диссипативными потерями равен:

$$Z_{вх} = \frac{[(Z_{0r} - Z_r) + j(Z_{0j} + Z_j)]}{S_{ст} W_0 \eta} + j\omega \rho_0 \frac{S_{рп}^2}{S_{вх}} (l_0 + 2\delta_i). \quad (21)$$

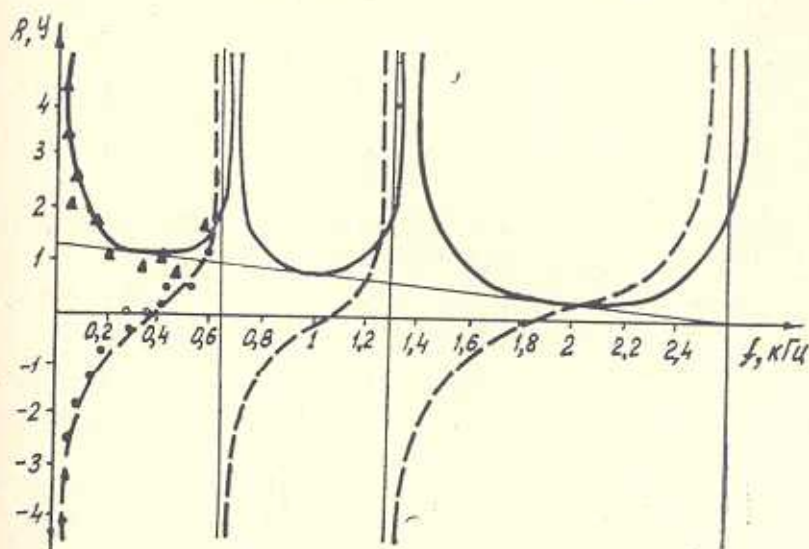


Рис. 2. Частотная характеристика интегрального импеданса объемного акустического элемента: \blacktriangle — R , $f_{рез} = 0,35$ кГц; \bullet — Y , $f_{антирез} = 0,65$ кГц.

Проверка расчета импедансных характеристик акустического элемента размером $25 \times 25 \times 25$ см, толщиной стенок 3 и 5 см и шириной щели, соответственно, 2, 4, 6, 8, 10, 12 и 14 см произведена по формулам (15), (17), (19), (21) с подстановкой в формулу (1). Вычисление произведено на ЭВМ СМ-4, по программе ФОРТРАН-4. Пример геометрического построения частотных характеристик импеданса щелевидных акустических элементов показан на рис. 2.

На представленной частотной характеристике интегрального импеданса поверхности акустического элемента, реактивная составляющая сопротивления несколько раз пересекает ось частот, обращаясь в этих точках в нуль (резонанс). Изменению комплексного сопротивления Y соответствует и характер звукопоглощения: в точках резонанса Y резко возрастает (при отсутствии потерь $Y \rightarrow \infty$), а на частотах антирезонанса — падает до малых значений.

Показано, что при определенной ширине диссипативной щели можно достичь явления звукопоглощения при очень малых размерах щели по сравнению с длиной звуковой волны. В частности, это заметно на средних и высоких частотах, где величина звукопоглощения увеличивается до 30—50%, а в диапазоне низких частот происходит незначительное увеличение звукопоглощения в пределах 10—20%. Оптимальное звукопоглощение происходит при согласовании входного импеданса поверхности облицовки с волновым сопротивлением воздуха. Величина звукопоглощения объемного звукопоглотителя определяется не только его линейными размерами по отношению к длине звуковой волны, но и акустическими характеристиками его поверхности, т. е. значениями нормального импеданса.

ՅՈՒ Ա. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

ԻՄՊԵԴԱՆՍՈՎ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՃԵՂՔԱՎՈՐ ՉԱՅՆԱՅԻՆ ԷԼԵՄԵՆՏԻ ԱՐՔԱՅԻՆ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԼՈՒԾՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Գիտարկված է խորանարդային ձևի նեոբին դատարկությունով և երկայնական ձեղրային բացվածք ունեցող ծավալային էլեմենտների ձայնադիտական բնութագրերի տեսական հաշվարկը:

Հաշվարկման ստացված ինժեներական մեթոդը թույլ է տալիս որոշել բարդ ուրվագծով ձայնային էլեմենտների ձայնակկանիչ բնութագրերը, եթե հայտնի են հեռանյալ ալիքային պարամետրերը՝ դիմադրությունը, ձայնակկանիչ նյութի տարածման հաստատունը, երկրաչափական պարամետրերը և ձայնի ալիքի երկարությունը:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Скулик Е. Основы акустики.— М.: Мир, т. 1, 1976.— 519 с.
2. Левин Л. Теория волноводов.— М.: Радио и связь, 1981.— 310 с.
3. Велижанкина К. А., Воронина Н. Н. Излучение щели в перегородке волновода, нагруженной произвольным импедансом.— Вестник МГУ, 1969, № 1, с. 55—62.
4. Ржевкин С. Н. Курс лекций по теории звука.— М.: Изд-во МГУ, 1960.— 337 с.
5. Morse P. M., Ingard U. Theoretical acoustics. — New York: 1968. — 924p.