

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Г. Л. АРТЕМЯН, Г. О. САРГСЯН, Կ. Ի. ԿԱՐԱԽԱՆՅԱՆ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ СТУПЕНЧАТЫХ ВАЛОВ ПРИ КРУЧЕНИИ

Рассматривается задача кручения ступенчатого вала под действием вращающего момента M по середине и моментов M_1 и M_2 на концах вала (рис. 1а). Кручение произвольного тела вращения в виде ступенчатого вала произвольной осесимметричной, боковой и торцевой нагрузками изучено в [1]. Решение этой задачи сведено к бесконечным системам линейных уравнений и поэтому его практическое использование для многоступенчатых валов становится затруднительным из-за математической сложности построения конечных решений. Ниже предлагается упрощенный приближенный метод расчета напряженного состояния ступенчатых валов, который применен для расчета валов электродвигателей малой мощности на стадии их проектирования.

По аналогии с задачами изгиба ступенчатых балок применен метод приведения ступенчатого вала к валу с единой жесткостью с дальнейшим интегрированием уравнений равновесия. При замене ступенчатого вала валом с единой приведенной жесткостью на кручение (рис. 1б) коэффициентами приведения для отдельных участков являются:

$$\gamma_1 = \left(\frac{d}{d_1}\right)^4; \quad \gamma_2 = 1; \quad \gamma_3 = \left(\frac{d}{d_2}\right)^4.$$

Действующие на приведенный вал моменты определяются формулами:

$$\begin{aligned} m_1 &= M_1 \gamma_1 = M_1 \left(\frac{d}{d_1}\right)^4; \\ m_2 &= M_1 (1 - \gamma_1) = M_1 \left[1 - \left(\frac{d}{d_1}\right)^4\right]; \\ m_3 &= -M \gamma_2 = -M; \\ m_4 &= M_2 (1 - \gamma_3) = M_2 \left[1 - \left(\frac{d}{d_2}\right)^4\right]; \\ m_5 &= M_2 \gamma_3 = M_2 \left(\frac{d}{d_2}\right)^4. \end{aligned} \tag{1}$$

Предполагается, что моменты m_1, m_2 и m_3, m_4, m_5 действуют, соответственно, на участках шириной $b, 2\varepsilon, 2B, 2\varepsilon, 2b_1$.

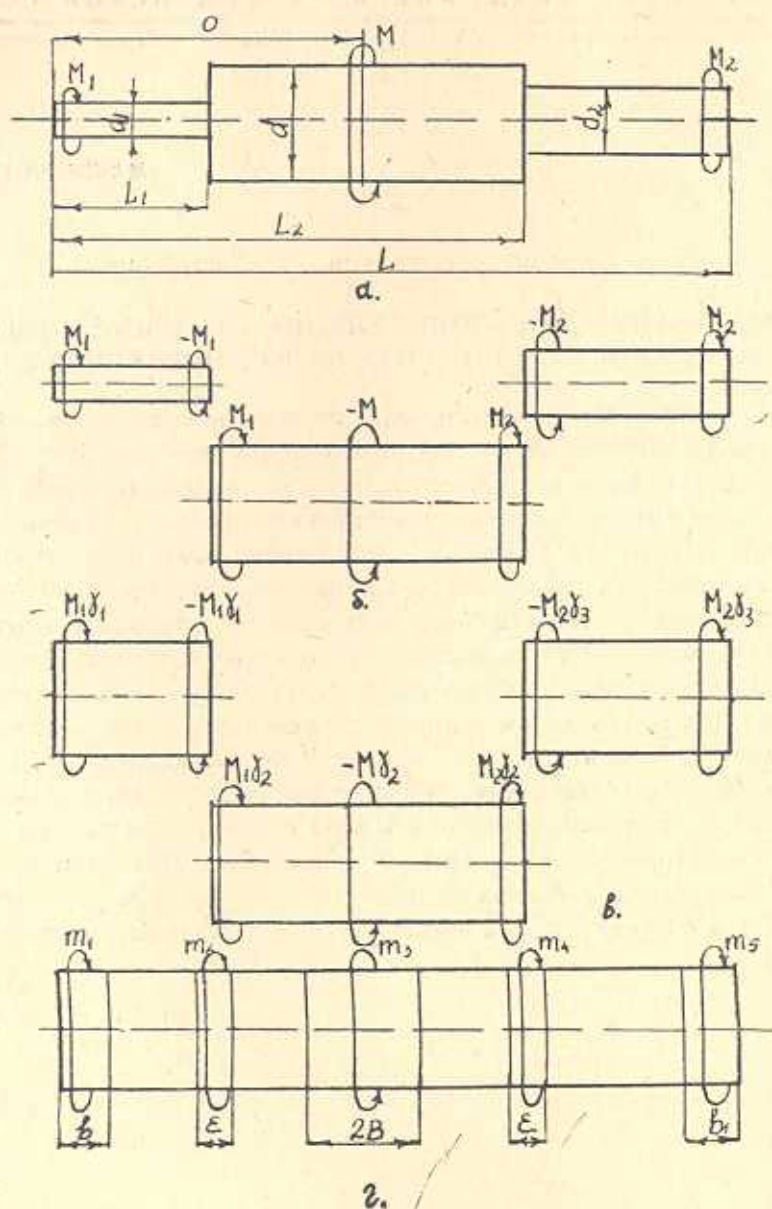


Рис. 1.

Располагая цилиндрическую систему координат на левом торце вала и направляя zz по оси вала, для функции распределения касательных напряжений $\tau_{r\varphi}$, получим:

$$r_{z_2}(Rz) = f(z) = \begin{cases} \frac{m_1}{2\pi R^2 b}, & 0 < z < b; \\ \frac{m_2}{4\pi R^2 \varepsilon}, & L_1 - \varepsilon < z < L_1 + \varepsilon; \\ \frac{m_3}{4\pi R^2 B}, & a - B < z < a + B; \\ \frac{m_4}{4\pi R^2 \varepsilon}, & L_2 - \varepsilon < z < L_2 + \varepsilon; \\ \frac{m_5}{2\pi R^2 b}, & L - b_1 < z < L; \\ 0, & \begin{aligned} & b < z < L_1 - \varepsilon, \\ & L + \varepsilon < z < a - B, \\ & a + B < z < L_2 - \varepsilon, \\ & L_2 + \varepsilon < z < L - b_1, \end{aligned} \end{cases} \quad (2)$$

где $R = \frac{d}{2}$.

Кусочно-непрерывная функция $f(z)$ на интервале $0 < z < L$ разлагается в ряд Фурье

$$f(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi z}{L},$$

где

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) dz; \quad a_k = \frac{2}{L} \int_0^L f(z) \cos \frac{k\pi z}{L} dz. \quad (3)$$

Подстановка значения $f(z)$ из (2) в (3) и предельный переход при $\varepsilon \rightarrow 0$ приводит к следующим формулам для определения коэффициентов разложения:

$$a_0 = 0; \quad a_k = \frac{Q_k}{k\pi^2 R^2},$$

где

$$\begin{aligned} Q_k = & M_1 \left[\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_1}{L} + \left(\frac{d}{d_1} \right)^4 \left(\sin \frac{k\pi b}{L} - \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_1}{L} \right) \right] + \\ & + \frac{M}{B} \cos \frac{k\pi a}{L} \sin \frac{k\pi B}{L} + M_2 \left[\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_2}{L} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{d}{d_2} \right)^4 \left(\frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi L_2}{L} - \frac{(-1)^k}{b_1} \sin \frac{k\pi b_1}{L} \right) \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

В цилиндрических координатах (r, φ, z) функция напряжения $\Phi(r, z)$ в области осевого сечения вала удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{3}{r} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

а на контуре осевого сечения — граничному условию:

$$\Phi [r(s); z(s)] = - \int_0^s T_n(s) \cdot r^2(s) ds,$$

где

$$T_n(s) = \tau_{\varphi r} \frac{dz}{ds} + \tau_{\varphi z} \frac{dr}{ds} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial s} \quad (6)$$

— проекция полного напряжения на нормаль к контуру осевого сечения на расстоянии s по длине образующей вала; $r(s)$ — радиус вала в сечении s ;

$$\tau_{\varphi r} = - \frac{1}{r^2} \frac{r \partial \Phi}{\partial z}; \quad \tau_{\varphi z} = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (7)$$

Так как вал скручивается нагрузкой симметричной оси, то на оси вала напряжения $\tau_{\varphi r}$ и $\tau_{\varphi z}$ равны нулю, т. е. $\Phi(0, z) = \text{const}$, что без ограничения общности приводит к условию

$$\Phi(0, z) = 0. \quad (8)$$

Торцы вала $z = 0$ и $z = L$ свободны от напряжений, что при учете (6) означает

$$\Phi(r; 0) = \Phi(r; L) = 0. \quad (9)$$

Решение уравнения (5) получается в виде

$$\Phi(r; z) = r^2 \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right) \sin \frac{k\pi z}{L}, \quad (10)$$

где $I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right)$ — функция Бесселя первого рода от мнимого аргумента.

Тогда условия (8) и (9) удовлетворяются автоматически, и для напряжений $\tau_{\varphi r}$ из (10) и (7) получается

$$\tau_{\varphi r} = - \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{\infty} k A_k I_2 \left(\frac{k\pi r}{L} \right) \cos \frac{k\pi z}{L},$$

где

$$A_k = \frac{L Q_k}{k\pi^2 R^2 I_2 \left(\frac{k\pi R}{L} \right)}. \quad (11)$$

Функция напряжений и касательные напряжения определяются формулами:

$$\Phi(r; z) = \frac{Lr^2}{\pi^3 R^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k} \frac{I_1\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \sin \frac{k\pi z}{L};$$

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{\pi^2 R^2} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \cos \frac{k\pi z}{L}; \quad (12)$$

$$\tau_{\varphi z} = -\frac{1}{\pi^2 R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Q_k}{k} \left[2 \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} + \frac{k\pi}{L} \frac{I_2\left(\frac{k\pi r}{L}\right)}{I_2\left(\frac{k\pi R}{L}\right)} \right] \sin \frac{k\pi z}{L}.$$

Для оценки точности предложенного аналитического метода были выполнены расчеты напряжений в различных сечениях вала, представленного на рис. 2. Эти значения сравнены с результатами расчетов, приведенными в [2]. Как и было принято в [2], в качестве сравниваемых значений напряжений взяты отношения действующих на данном участке напряжений к напряжениям $T_1 = \frac{M}{4\pi r_0^3}$ на участке $0 < z < \frac{r_0}{2}$ (табл.).

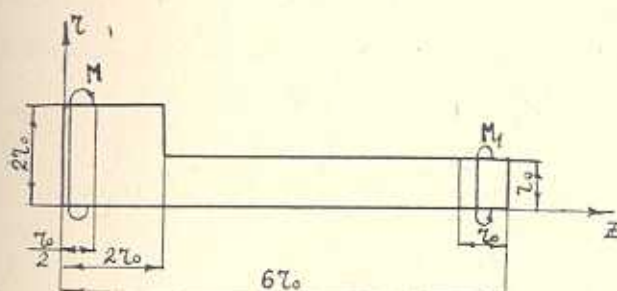


Рис. 2.

Таблица

$\frac{r}{r_0}$	$\frac{\tau_{z\varphi}}{T_1}$	$\frac{\tau_{r\varphi}}{T_4}$	$\frac{\tau_{z\varphi}}{T_1}$	$\frac{\tau_{r\varphi}}{T_1}$	Сравнение результатов в %	
	по формулам (12)		по [2]		$\frac{\tau_{z\varphi}}{T_1}$	$\frac{\tau_{r\varphi}}{T_1}$
0	0	0	0	0	0	0
0,25	0,295	-0,031	0,256	-0,027	15,2	13,8
0,5	0,51	-0,125	0,471	-0,112	8,3	11,6
1	0,652	-0,31	0,62	-0,275	5,2	12,7

Анализ результатов показывает, что предложенный метод по сравнению с точным приводит к несколько завышенным значениям напря-

жений, что можно отнести к запасу прочности конструкции. Приведенные результаты свидетельствуют о практической применимости метода приведения ступенчатого вала к валу с единой приведенной жесткостью при решении задач кручения.

НИИ электромаш

15. II. 1983

Հ. Լ. ԱՐՏԵՄՅԱՆ, Հ. Հ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Կ. Ի. ԿՈՐՈՒԱՆՅԱՆ

ԱՍՏԻՃԱՆԱՎՈՐ ԼԻՍԵՌՆԵՐԻ ԼԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ՎԻՃԱԿԻ ՎԵՐԼՈՒԾԱԿԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ
ՈՂՈՐՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ ֆ ո ֆ ո լ մ

Քննարկվում է աստիճանավոր լիսեռի ոլորման խնդիրը լիսեռի միջին մասում և նրա ծայրերում ազդող մոմենտների ազդեցության տակ: Կիրառված է աստիճանավոր լիսեռի միասնական կոշտությամբ լիսեռով ներկայացման եղանակը՝ հավասարակշռության հավասարումների հետագա ինտեգրմամբ:

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Абрамян Б. Л., Джрбашян М. М. О кручения валов переменного сечения.— ПММ, 1951, XV, 64, с. 451—472.
2. Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л. Кручение упругих тел.— М.: Физматгиз, 1969.— 688 с.