ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXXVII, № 2, 1984 Серия технических наук

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ТЕХНИКА

Ю. М. ГАСПАРЯН

# НАДЕЖНОСТЬ КОМБИНАЦИОННЫХ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Вычислению надежности логических схем (ЛС) посвящено множество работ [1—6]. В [1—4] для анализа надежности ЛС используется функция соответствия, в [4] понятие обобщенной (приведенной к выходу) ошибки элемента схемы, а в [5] — метод обратного анализа. В [6] для анализа надежности ЛС применено понятие булевой производной, что упрощает использование ЭВМ.

В данной работе рассматривается метод анализа надежности ЛС с использованием понятия булевой производной с той разницей, что при вычислениях применяются только булевы производные отдельных элементов. Кроме того, первоначальная логическая схема преобразуется в приведенную сеть, обладающую свойством ортогональности, что существенно упрощает вычисление.

*Определение* 1. Производной булевой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по совокупности аргументов $x_{i_1, \ldots, i_k} = [x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}]$ $(1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n)$ называется функция

$$\frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}_{i_1, \ldots, i_k}} = f(\tilde{x}) \oplus f(x_1, \ldots, \bar{x}_{i_1}, \ldots, \bar{x}_{i_k}, \ldots, x_n). \qquad (1)$$

В частном случае производная булевой функции $f(\tilde{x})$ по аргументу $x_i$ определяется соотношением

$$\frac{df(\tilde{x})}{dx_i} = f(\tilde{x}) + f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \bar{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

*Определение* 2. Нормой булевой функции $f(\tilde{x})$ называется число

$$\|f(\tilde{x})\| = \sum_{\tilde{\alpha} \in E^n} P(\tilde{\alpha}) f(\tilde{\alpha}), \qquad (3)$$

где $P(\tilde{\alpha})$ — вероятность появления набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$; $\tilde{\alpha} \in E^n$, причем, $\sum\limits_{\tilde{\alpha} \in E^n} P(\tilde{\alpha}) = 1$.

Рассмотрим комбинационную схему $S$ с одним выходом $y$ и входами $x_1, \ldots, x_n$, состоящую из $N$ элементов $a_1, \ldots, a_N$. Выход $i$-го элемента обозначим через $a_i$. Тогда вероятность передачи ошибки (типа „Не") с выхода $i$-го элемента на выход схемы $P_i^*$ будет определяться соотношением

$$P_i^* = P\left(\frac{dy}{da_i} = 1\right) \qquad i = \overline{1, N},$$

где $P\left(\frac{dy}{da_i} = 1\right)$ — вероятность того, что булева производная выхода схемы $y$ относительно выхода элемента $a_i$ равна единице.

Имея значения $P_i^*$, $i = \overline{1, N}$, с помощью равенства [5, 6] можно вычислить надежность ЛС:

$$P_c = 1 - \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i P_i^*, \tag{4}$$

где $\varepsilon_i$ — вероятность появления ошибки на выходе элемента $a_i$. Из (4) очевидно, что основной проблемой при нахождении $P_c$ является вычисление $P_i^*$, $i = \overline{1, N}$.

В данной работе предлагается итерационная процедура вычисления $P_i^*$, $i = \overline{1, N}$, которая существенно упрощает объем вычислений.

Вначале рассмотрим способ вычисления $P^*$ для двух классов ЛС.

*Класс 1.* Любая схема этого класса состоит из последовательно соединенных между собой элементов (рис. 1а). Для ЛС, принадлежащей классу 1, доказывается следующее.

*Теорема 1.*

$$\frac{da_n}{da_0} = \frac{da_n}{da_{n-1}} \cdot \frac{da_{n-1}}{da_{n-2}} \cdots \frac{da_2}{da_1} \cdot \frac{da_1}{da_0}. \tag{5}$$

На рис. 1б показана приведенная сеть передачи ошибки для схем, принадлежащих классу 1.

*Класс 2.* Любая схема из этого класса имеет структуру, показанную на рис. 2. Для ЛС, принадлежащей классу 2, доказывается следующее утверждение.

*Теорема 2.* Для любой ЛС, принадлежащей классу 2 и состоящей из $n+1$ элементов, существует приведенная сеть передачи ошибки от входа на выход схемы, обладающая следующими свойствами:

а) структура приведенной сети представляет собой двухполюсник, состоящий из $2^n - 1$ параллельно соединенных ветвей;

б) приведенная сеть обладает свойством ортогональности в том смысле, что все конъюнкции булевых переменных, характеризующие состояния ветвей, равны нулю.

При доказательстве теоремы используется следующее равенство для ЛС, принадлежащей классу 2 (рис. 2):

$$\frac{dz}{da_0} = \bigvee_{i=1}^{n} \frac{dz}{da_i}\cdot\frac{da_i}{da_0}\prod_{j=1}^{n}\overline{\frac{dz}{da_j}} \vee \bigvee_{i=1}^{n}\bigvee_{\substack{j=1\\ i\neq j}}^{n} \frac{d^2z}{d(a_ia_j)}\cdot\frac{da_i}{da_0}\cdot\frac{da_j}{da_0}\prod\frac{df_l}{da_0}\vee\cdots$$

$$\cdots\vee\frac{da_1}{da_0}\cdots\frac{da_n}{da_0}\cdot\frac{d^nz}{d(a_1\ldots a_n)}. \qquad (6)$$

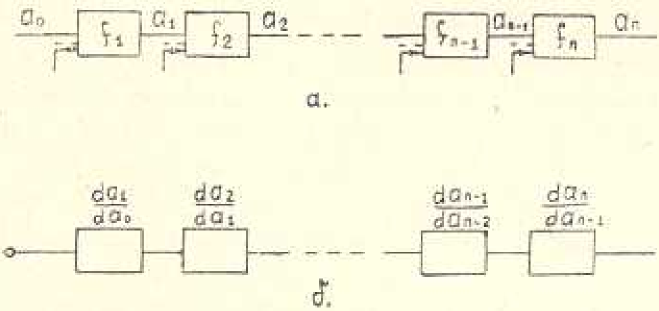


Рис. 1. а) Логическая схема, принадлежащая классу 1;
б) приведенная сеть передачи ошибки.

На рис. 2б показана приведенная сеть передачи ошибки для схемы, принадлежащей классу 2.

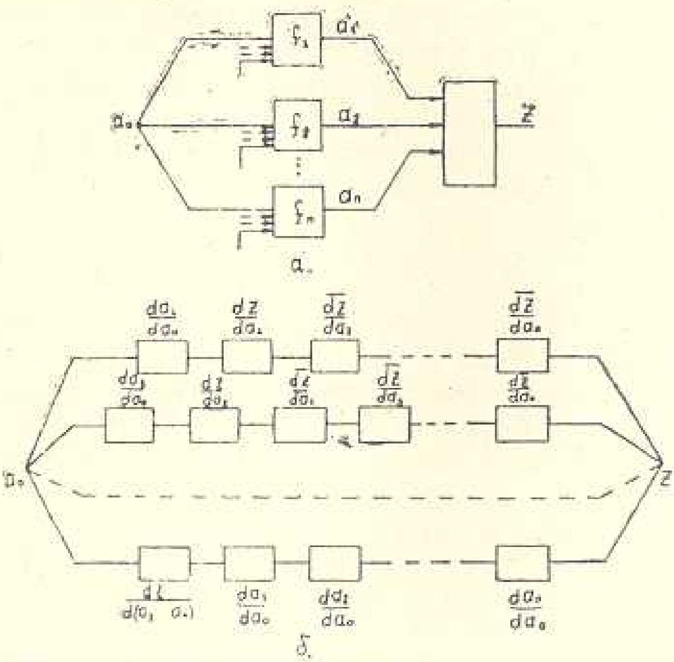


Рис. 2. а) Логическая схема, принадлежащая классу 2;
б) приведенная сеть передачи ошибки.

Теперь рассмотрим вопрос передачи ошибки в ЛС с произвольной структурой с одним входом и одним выходом.

Доказывается следующее утверждение.

*Теорема 3.* Для любой ЛС с одним входом $a_0$ и одним выходом $z$ существует приведенная сеть передачи ошибки от $a_0$ к $z$, обладающая следующими свойствами:

а) структура приведенной сети представляет собой двухполюсник, состоящий из параллельно и последовательно соединенных элементов;

б) приведенная сеть обладает ортогональностью в том смысле, что все конъюнкции булевых переменных, характеризующие состояние параллельно соединенных элементов, равны нулю.

*Доказательство.* Предположим, что выходной элемент схемы $S$ имеет $k$ входов (рис. 3а). Тогда ЛС можно отнести к классу 2 (рис. 2а), если в качестве элемента $a_i$, $i=\overline{1, k}$ рассмотреть подсхему схемы $S$ с входом $a_0$ и выходом $a_i$, включающую те элементы $S$, выходы которых непосредственно или через другие элементы связаны с $a_i$. Поэтому, согласно теореме 2, для $S$ можно построить приведенную сеть передачи ошибки от входа ЛС $a_0$, к выходу $z$, состоящую из $2^k-1$ параллельно соединенных ветвей, каждая из которых состоит из последовательно соединенных элементов, состояния которых определяются булевыми производными, т. е. элементы могут находиться в состоянии 0 или 1 (рис. 3б). Ветвям полученной приведенной сети соответствуют элементы, состояния которых определяются булевыми производными типа $\frac{da_i}{da_0}$, $i=\overline{1, k}$ Применяя аналогичные рассуждения, можно построить приведенные сети для этих элементов. Построение приведенной сети для ЛС заканчивается тогда, когда в ней появляются элементы, состояния которых определяются булевыми производными выходов тех элементов относительно $a_0$, входами которых является $a_0$.

Из алгоритма построения приведенной сети очевидно, что она является двухполюсником и что на $i$-ой итерации некоторые элементы, полученные в $(i-1)$-ой итерации, заменяются параллельно-последовательными структурами. Этим доказывается первый пункт теоремы.

Свойство ортогональности приведенной сети в смысле теоремы п. 2 исходит из свойства ортогональности приведенной сети схемы, принадлежащей классу 2. Так как в $i$-ой итерации при построении приведенной сети получаем параллельно соединенную структуру, которая обладает свойством ортогональности, то это свойство сохраняется и в $(i+1)$-ой итерации. Этим доказывается третий пункт теоремы. Теорема доказана.

Перейдем к описанию алгоритма вычисления $P_e$.

1. Из ЛС $S$ выделить подсхему, входом которой является выход элемента $a_i$, а выходом — выход $S$ и которая включает все элементы, выходы которых непосредственно или через другие элементы связаны с выходом $S$.

2. Построить приведенную сеть подсхемы, полученной в первом шаге.

3. Вычислить булевы производные выходов всех элементов относительно их входов, которые принадлежат подсхеме, полученной в первом шаге.

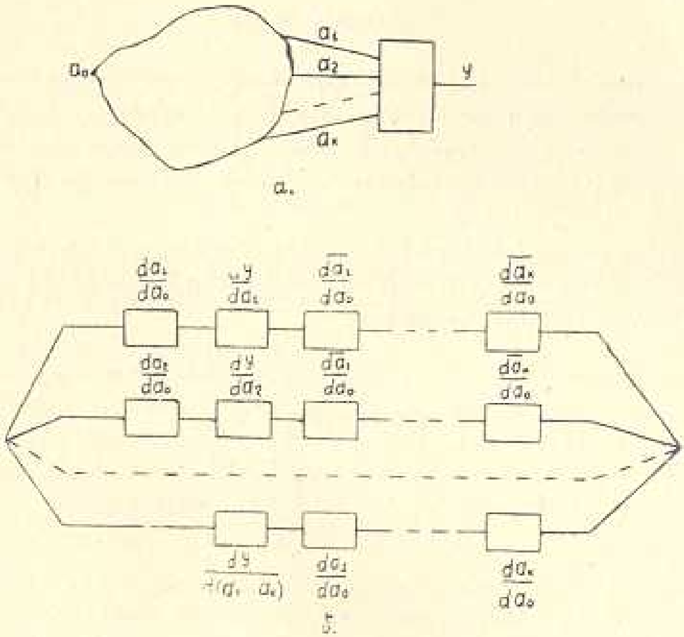

Рис. 3. а) Логическая схема в общем виде; б) приведенная сеть логической схемы.

4. Согласно (5) вычислить булевы функции, характеризующие состояния ветвей.

5. Используя (3) и (6), вычислить $P_i^*$, $i = \overline{1, n}$ для приведенной сети.

6. Согласно формуле (4) вычислить $P_c$.

Эти результаты легко распространяются на ЛС с $m$ выходами, если определить понятие «отказ» на выходе такой схемы. Если отказом ЛС считать появление ошибки по крайней мере на одном выходе ЛС, то задача определения $P_i^*$, $i = \overline{1, n}$ сводится к задаче определения надежности ЛС с одним выходом. Для этого к схеме нужно добавить один элемент с логикой «ИЛИ», входами которого являются все выходы исследуемой ЛС. Если отказом ЛС считается такое состояние на выходах схемы, при котором хотя бы на $k$ выходах из $m$ появляется ошибка, то необходимо к схеме добавить элемент с порогом $k$. В общем случае для оценки надежности ЛС с $m$ выходами нужно найти булеву функцию, выражающую зависимость отказа ЛС от распределения ошибок на выходах ЛС и добавить к первоначальной схеме выходной элемент, реализующий эту функцию. Таким образом, если возможно определить состояние отказа ЛС, то задача оценки надежности ЛС с $m$ выходами сводится к задаче анализа ЛС с одним выходом.

ЕрПИ им. К. Маркса

23. XI. 1983

ՅՈՒ. Մ. ԳԱՍՊԱՐՅԱՆ

# ՀԱՄԱԿՑՎԱԾ ՏՐԱՄԱԲԱՆԱԿԱՆ ՍԽԵՄԱՆԵՐԻ ՀՈՒՍԱԼԻՈՒԹՅՈՒՆԸ

## Ամփոփում

*Դիտարկվում է համակցված տրամաբանական սխեմաների հուսալիության գնահատման մեթոդ՝ բուլյան ածանցյալների օգտագործմամբ։ Տրամաբանական սխեմայի հուսալիության վերլուծման համար կառուցվում է համարժեք ցանց, որը իրենից ներկայացնում է երկբևեռ և օժտված է մոնոտոնության հատկությամբ։*

*Համարժեք ցանցի էլեմենտների վիճակը բնութագրում է այն էլեմենտների՝ իրենց մուտքերի նկատմամբ ելքերի բուլյան ածանցյալներով, որը էապես պարզեցնում է հուսալիության հաշվարկը։*

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Макаров С. В.* Вероятностные расчеты однотактных схем.— В сб.: Вычислительные системы, вып. 4. Ин-т математ. СО АН СССР, 1962, с. 29—53.
2. *Милюгин В. Д.* Надежность переключательных схем.— Автоматика и телемеханика, 1964, т. 25, № 9, с. 1375—1383.
3. *Чирков М. К.* О надежности логических переключательных схем.— В сб.: Вычислительная техника и вопросы программирования, ЛГУ, вып. 2, 1963, с. 16—38.
4. *Моньяков Н. В.* О надежности устройств автоматики с учетом их структуры.— Л.: Ленингр. дом научн. техн. пропаг., 1965.— 58 с.
5. *Левин В. М.* Анализ логических схем с высоконадежными элементами.— Автоматика и телемеханика, 1970, № 6, с. 111—117.
6. *Бозоян Ш. Е.* Некоторые свойства булевых дифференциалов и активностей аргументов булевых функций.— Проблемы передачи информации, 1978, т. XIV, вып. 1, с. 77—89.