

УДК 536.242

А. М. САРГСЯН, А. С. ХАЧИКЯН, Г. Г. НЕРСИСЯН

СТАЦИОНАРНЫЕ ТЕПЛОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В  
КУСОЧНО-ОДНОРОДНЫХ ТЕЛАХ

На основе решения двумерной стационарной задачи теплопроводности для кусочно-однородного клина исследован характер распределения тепловых потоков в окрестности его вершины при граничных условиях первого и второго родов и при условиях смешанного типа. Показано, что при смешанных граничных условиях, в отличие от граничных условий первого и второго родов, отсутствует область изменения углов растворов однородных клиньев, где независимо от отношения коэффициентов теплопроводности в окрестности вершины составного клина тепловые потоки стремятся к нулю.

Ил. 4. Библиогр.: 8 назв.

*Կտր-տր-կտր համասեռ սեպի շերտազարգացանոթյան կրկնաթի հաստատուն լուծորի լուծման հիման վրա հետազոտված է սեպի անկյունային կետում ջերմային հոսքի բաշխման բնույթը առաջին, երկրորդ և խառը կարգային պայմանների դեպքում: Յուրյակ սեպի կարգային պայմանների դեպքում, ի տարբերություն առաջին և երկրորդ կարգային պայմանների, բացակայում է համասեռ սեպերի բաշխվածքների անկյունների փոփոխման այն օրինակը, որով ջերմային հոսքերը անկյուն շերտազարգացանոթյան զարժակիցների հարթերայինից հոսում են դուրս:*

В известных решениях задачи теории теплопроводности для однородных и неоднородных тел изучалось только распределение температуры в зависимости от тепловых характеристик и различных граничных условий [1—6]. Однако вопрос об исследовании тепловых потоков в угловых точках клиновидных областей остался открытым. Поведения тепловых потоков в таких областях важно при прочностных расчетах и построении математических моделей, обеспечивающих большую адекватность с реальными тепловыми процессами.

В настоящей работе определяется плоское стационарное температурное поле в кусочно-однородном клине и исследуется характер распределения тепловых потоков в окрестности его вершины. Тепловой контакт между однородными клиньями принимается идеальным. На границах клина задаются граничные условия первого и второго родов и условия смешанного типа.

Стационарное температурное поле в составном клине (рис. 1) удовлетворяет уравнению теплопроводности [1]

$$\frac{\partial^2 T_j(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_j(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T_j(r, \theta)}{\partial \theta^2} = 0, \quad (1)$$

$$j = 1, \quad 0 < \theta < \theta_1, \quad j = 2, \quad -\theta_2 < \theta < 0, \quad 0 < r < \infty$$

при следующих контактных условиях на линии раздела  $\theta = 0$ :



$$T_1(r, 0) = T_2(r, 0), \quad \frac{\partial T_1(r, 0)}{\partial \theta} = \lambda \frac{\partial T_2(r, 0)}{\partial \theta} \quad (2)$$

и граничных условиях:

первого рода —

$$T_1(r, \theta_1) = f_1(r), \quad T_2(r, -\theta_2) = f_2(r); \quad (3)$$

второго рода —

$$\frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial T_1(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \varphi_1(r), \quad \frac{\lambda_2}{r} \frac{\partial T_2(r, -\theta_2)}{\partial \theta} = \varphi_2(r); \quad (4)$$

смешанного типа —

$$\frac{\lambda_1}{r} \frac{\partial T_1(r, \theta_1)}{\partial \theta} = \varphi_1(r), \quad T_2(r, -\theta_2) = f_2(r). \quad (5)$$

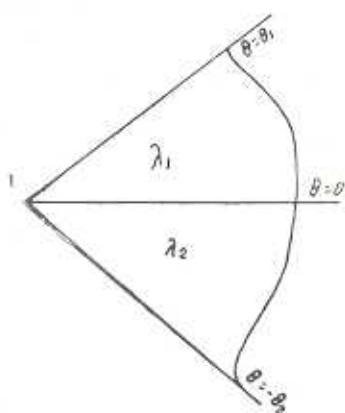


Рис. 1.

В условиях (2)–(5)  $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ ,  $\lambda_j$  — коэффициенты теплопроводности,  $f_j(r)$  и  $\varphi_j(r)$  — заданные функции,  $0 < \lambda < \infty$ ,  $\theta_1 + \theta_2 \leq 2\pi$ .

К краевой задаче (1)–(5) применяется интегральное преобразование Мелина [7]

$$\bar{T}_j(p, \theta) = \int_{\delta}^{\infty} T_j(r, \theta) r^{p-1} dr, \quad (6)$$

$$T_j(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \bar{T}_j(p, \theta) r^{-p} dp.$$

Если предположить, что на бесконечности температура исчезает как  $r^{-\delta}$ , где  $\delta > 0$ , а на вершине клина ( $r \rightarrow 0$ ) остается ограниченной, то первый интеграл (6) будет сходиться при  $0 < \operatorname{Re} p < \delta$ , что и заключает в себе путь интегрирования  $L$  во второй формуле (6).

В результате применения к уравнению (1) преобразования Мелина приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению второго порядка, решение которого имеет вид

$$\bar{T}_j(p, \theta) = A_j(p) \cos p\theta + B_j(p) \sin p\theta. \quad (7)$$

Удовлетворяя преобразованным гранично-контактным условиям, которые получаются из (2)–(5) после применения преобразования Мелина, для неизвестных коэффициентов  $A_j(p)$  и  $B_j(p)$  получим: для граничного условия первого рода (3) —

$$\begin{aligned} A_j(p) &= 2 \{ \bar{f}_1(p) \sin p\theta_2 + \bar{f}_2(p) \sin p\theta_1 \}; \\ B_j(p) &= 2\lambda^{2-1} \{ \bar{f}_1(p) \cos p\theta_2 - \bar{f}_2(p) \cos p\theta_1 \}; \\ \Delta(p) &= (\lambda + 1) \sin p(\theta_1 + \theta_2) + (\lambda - 1) \sin p(\theta_1 - \theta_2); \end{aligned} \quad (8)$$

второго рода (4) —

$$\begin{aligned}
 A_j'(p) &= -2 \left[ \frac{\bar{\varphi}_1(p+1)}{\lambda_1 p} \cos p \theta_2 + \frac{\bar{\varphi}_2(p+1)}{\lambda_1 p} \cos p \theta_1 \right]; \\
 B_j'(p) &= 2 \left[ \frac{\bar{\varphi}_1(p+1)}{\lambda_1 p} \sin p \theta_2 - \frac{\bar{\varphi}_2(p+1)}{\lambda_2 p} \sin p \theta_1 \right] i^{2-j}; \\
 \Delta(p) &= (\lambda+1) \sin p (\theta_1 + \theta_2) - (\lambda-1) \sin p (\theta_1 - \theta_2);
 \end{aligned} \quad (9)$$

для смешанного граничного условия (5) —

$$\begin{aligned}
 A_j'(p) &= 2 \left[ \frac{\bar{\varphi}_1(p+1)}{\lambda_1 p} \sin p \theta_2 + f_2(p) \cos p \theta_1 \right]; \\
 B_j'(p) &= 2 \left[ \frac{\bar{\varphi}_1(p+1)}{\lambda_1 p} \cos p \theta_2 + f_2(p) \sin p \theta_1 \right] i^{2-j}; \\
 \Delta(p) &= (\lambda+1) \cos p (\theta_1 + \theta_2) - (\lambda-1) \cos p (\theta_1 - \theta_2),
 \end{aligned} \quad (10)$$

где  $A_j(p) = A_j'(p) \Delta(p)$ ,  $B_j(p) = B_j'(p) \Delta(p)$ .

С помощью (7) и обратного преобразования Меллина получим формулы для определения температур и тепловых потоков

$$T_j(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{A_j'(p) \cos p \theta + B_j'(p) \sin p \theta}{\Delta(p)} r^{-p} dp,$$

$$\lambda_j \frac{\partial T_j(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{-\lambda_j}{2\pi i} \int_L \frac{A_j'(p) \cos p \theta + B_j'(p) \sin p \theta}{\Delta(p)} r^{-p-1} p dp, \quad (11)$$

$$\frac{\lambda_j}{r} \frac{\partial T_j(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{-\lambda_j}{2\pi i} \int_L \frac{A_j'(p) \sin p \theta - B_j'(p) \cos p \theta}{\Delta(p)} r^{-p-1} p dp. \quad (12)$$

Для исследования поведения тепловых потоков при  $r \rightarrow 0$  дополним прямую  $L$  влево некоторым полукругом и применим теорему о вычетах. В результате получим

$$\lambda_j \frac{\partial T_j(r, \theta)}{\partial r} = \lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n-1} \frac{A_j'(-p_n) \cos p_n \theta - B_j'(-p_n) \sin p_n \theta}{\Delta_1(p_n)} p_n, \quad (13)$$

$$\frac{\lambda_j}{r} \frac{\partial T_j(r, \theta)}{\partial \theta} = -\lambda_j \sum_{n=0}^{\infty} r^{p_n-1} \frac{A_j'(-p_n) \sin p_n \theta - B_j'(-p_n) \cos p_n \theta}{\Delta_1(p_n)} p_n. \quad (14)$$

В формулах (13), (14)  $\Delta_1(p) = d\Delta(p)/dp$ ,  $p_n > 0$  — корни уравнения

$$\Delta(p) = 0. \quad (15)$$

Формулы (13) и (14) получены при условии, что полюсами подынтегральных выражений служат только корни уравнения (15), которые действительны и просты. В работах [1, 8] доказано, что корни уравнения (15) для случая граничного условия первого рода вещественны и просты. Аналогично доказывается, что это имеет место и в случае граничного условия второго рода. Докажем эти утверждения для случая граничного условия смешанного типа.

Принимая, что  $p = \xi + i\eta$  ( $\eta \neq 0$ ) и приравнивая нулю действительную и мнимую части  $\Delta(p)$ , имеем

$$1 = \frac{1-i}{1+i} \left[ \frac{\operatorname{ch}^2 \gamma b^-}{\operatorname{ch}^2 \gamma b} \cos^2 \xi b^- + \frac{\operatorname{sh}^2 \gamma b^-}{\operatorname{sh}^2 \gamma b} \sin^2 \xi b^- \right], \quad (16)$$

где  $b^+ = b_1 + b_2$ ,  $b^- = b_1 - b_2$ ,  $b^+ > b^-$ .

Учитывая условие  $\lambda > 0$ , замечаем, что соотношение (16) не выполняется при действительных  $\xi$  и  $\eta$ . Полученное противоречие и доказывает, что  $\eta = 0$ , т. е. корни уравнения (15) вещественны и в этом случае.

Если предположить, что  $p = p_n$  является двукратным корнем уравнения (15), то из условий  $\Delta(p_n) = 0$  и  $d\Delta(p_n)/dp = 0$  следует

$$\cos p_n b^+ = \frac{1-i}{1+i} \cos p_n b^-, \quad \sin p_n b^+ = \frac{(1-i)b^-}{(1+i)b^+} \sin p_n b^-.$$

Сложив полученные соотношения и предварительно возведя их в квадрат, получим

$$\sin^2 p_n b^- = \frac{(a^2 - 1)(b^+)^2}{4a^2 b_1 b_2}, \quad a = \frac{1-i}{1+i}, \quad -1 < a < 1.$$

Левая часть последнего соотношения всегда положительна, а правая — отрицательна. Следовательно,  $p = p_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) не может быть корнем второго порядка.

Из формул (13) и (14) видно, что тепловые потоки при приближении к вершине составного клина стремятся к нулю, если все корни  $p_n > 1$  и к бесконечности, если среди корней есть хотя бы одно  $p_n < 1$ . При  $p_n = 1$  тепловые потоки в угловой точке клина конечны.

Таким образом, исследование теплового состояния в окрестности угловой точки свелось к определению наименьшего положительного корня уравнения (15). Детальное исследование корней этого уравнения проведено в [8] в связи с изучением характера напряженного состояния около угловой точки поперечного сечения скручиваемого составного стержня. С помощью результатов [8] и решения уравнения (15) в предельных случаях  $\lambda = 0$ ,  $\lambda = 1$  и  $\lambda = \infty$  заключаем, что в случае граничного условия первого рода (рис. 2): а) тепловые потоки около вершины составного клина обращаются в нуль при приближении к углу независимо от отношения коэффициентов теплопроводности  $\nu$ , если  $b_1$  и  $b_2$  меняются в области  $0 < b_1 < \pi/2$ ,  $0 < b_2 < \pi/2$ ,

которая на рис. 2 показана двойной заштриховкой; б) тепловые потоки около угловой точки клина стремятся к бесконечности независимо от  $\lambda$ , если  $\theta_1$  и  $\theta_2$  лежат в областях  $\pi_2 < \theta_1 < \pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ;  $\theta_1 > \pi$ ,  $0 < \theta_2 < \pi$ ;  $\theta_2 > \pi$ ,  $0 < \theta_1 < \pi$ , которые на рис. 2 показаны простой заштриховкой; в) стремление тепловых потоков к нулю или бесконечности при приближении к угловой точке зависит от  $\lambda$ , когда углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  меняются в незаштрихованных областях (рис. 2).

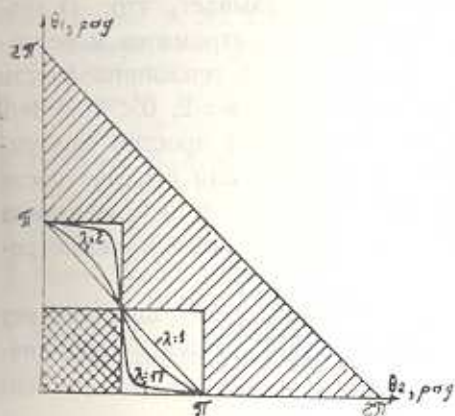


Рис. 2.

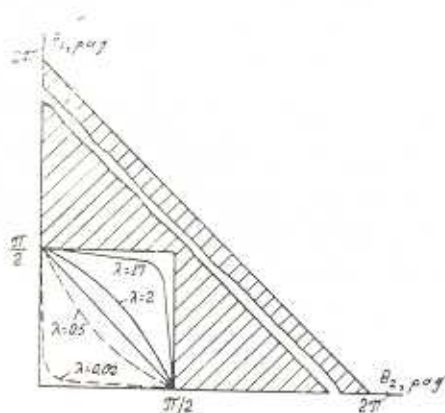


Рис. 3.

Каждому значению  $\lambda$  соответствует предельная кривая

$$(\lambda + 1) \sin(\theta_1 + \theta_2) + (\lambda - 1) \sin(\theta_1 - \theta_2) = 0, \quad (17)$$

проходящая через незаштрихованные области. Если точка, определяемая углами  $\theta_1$  и  $\theta_2$ , и начало координат при данном значении  $\lambda$  лежат на одной стороне предельной кривой, тепловые потоки в угловой точке стремятся к нулю. Если же точка лежит на предельной кривой (кривые  $\lambda=1$ ,  $\lambda=2$  и  $\lambda=17$  на рис. 2), тепловые потоки в угловой точке будут конечными.

Предельная кривая для однородного клина ( $\lambda=1$ ), как следует из (17), представляет собой отрезок  $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ . Наименьший положительный корень при  $\lambda=1$  получается из (15)  $p_1 = \pi(\theta_1 + \theta_2)$ . Если угол раствора однородного клина  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ , то  $p_n < 1$ , а если  $\theta_1 + \theta_2 > \pi - p_n < 1$ . Следовательно, в окрестности выступающего угла однородного клина тепловые потоки стремятся к нулю, а в окрестности входящего угла — к бесконечности.

Для составного клина возможны такие значения параметров  $\lambda$ ,  $\theta_1$  и  $\theta_2$  из незаштрихованной области рис. 2, при которых в малой окрестности входящего угла тепловые потоки стремятся к нулю. При других значениях этих параметров в окрестности выступающего угла тепловые потоки стремятся к бесконечности, что невозможно для однородного клина.

Заметим, что в случае граничного условия второго рода определитель

$$\Delta(p) = (\lambda + 1) \sin p(\theta_1 + \theta_2) - (\lambda - 1) \sin p(\theta_1 - \theta_2)$$

совпадает с определителем, полученным для граничного условия первого рода заменой  $\lambda$  на  $1/\lambda$ , поэтому вышеприведенный анализ относится и к этому случаю.

Для граничного условия смешанного типа полюсами подынтегральных выражений (10)–(12) служат корни уравнения

$$\Delta(p) = (\lambda + 1) \cos p(\theta_1 + \theta_2) + (\lambda - 1) \cos p(\theta_1 - \theta_2) = 0. \quad (18)$$

Аналогичное исследование корней (18) показывает, что: а) тепловые потоки около вершины составного клина стремятся к бесконечности независимо от отношения коэффициентов теплопроводности  $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$ , если углы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  меняются в областях  $\theta_1 > \pi/2$ ,  $0 < \theta_2 < 3\pi/2$  и  $\theta < \theta_1 < \pi/2$ ,  $\theta_2 > \pi/2$ , которые на рис. 3 показаны простой заштриховкой; б) стремление тепловых потоков к нулю или бесконечности около вершины составного клина зависит от  $\lambda$ , если  $\theta_1$  и  $\theta_2$  меняются в области  $0 < \theta_1 < \pi/2$ ,  $0 < \theta_2 < \pi/2$ , которая на рис. 3 незаштрихована.

Предельная кривая для однородного клина ( $\lambda = 1$ ) представляет собой отрезок прямой  $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ . Наименьший корень имеет значение  $p = \frac{\pi}{2(\theta_1 + \theta_2)}$ .

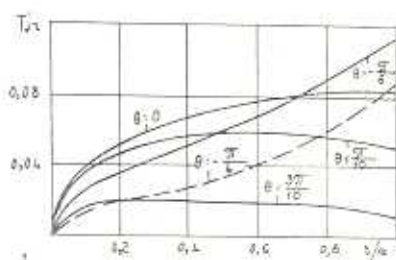


Рис. 4а.

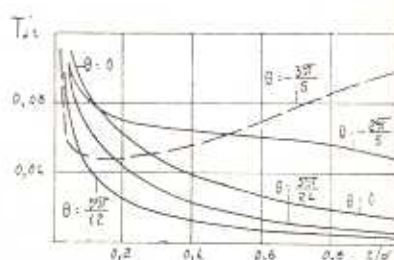


Рис. 4б.

Таким образом, в случае смешанных граничных условий в плоскости  $(\theta_1, \theta_2)$  отсутствует область изменения углов растворов однородных клиньев, при которой независимо от отношения коэффициентов теплопроводности  $\lambda$  в угловой точке составного клина тепловые потоки стремятся к нулю.

При граничных условиях первого рода, заданных в виде  $T_1(r, \theta_1) = 0$ ,  $T_2(r, -\theta_2) = T_0 [h(r=b) - h(r=a)]$ , где  $h(r)$  — функция Хевисайда, вычислены безразмерные тепловые потоки  $T'_{jr} = (b/\theta T_0) \partial T_j / \partial \theta$  в двух случаях: а)  $\theta_1 = 2\pi/5$ ,  $\theta_2 = \pi/3$ ; б)  $\theta_1 = 5\pi/6$ ,  $\theta_2 = 4\pi/5$ . Результаты расчета для  $\lambda = 2$ ,  $a = 3$  и  $b = 2$  представлены на рис. 4.

Полученные в настоящей работе результаты дают возможность выбором теплофизических и геометрических характеристик соединяемых материалов обеспечить необходимое распределение тепловых потоков в смысле их равномерности или концентрации. Они могут быть

использованы при проектировании изделий, чувствительных к изменениям температур и тепловых потоков.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Карслю Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел.—М.: Наука, 1964.—487 с.
  2. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Некоторые задачи теплопроводности для клиновидных тел // ЖТФ.—1964.—Т. 34, № 5.—С. 801—809.
  3. Третьяченко Г. Н., Терлецкий В. А. О некоторых задачах нестационарной теплопроводности для клиновидных областей // ИФЖ.—1973.—Т. 24, № 3.—С. 514—520.
  4. Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики.—М.: Наука, 1975.—127 с.
  5. Алексанян Р. К. Стационарное температурное поле в составном секторе // Изв. АН АрмССР. Механика.—1971.—Т. 24, № 6.—С. 14—25.
  6. Sinclair G. B. On the singular Eigenfunctions for Plane Harmonic Problem in Composite Regions./Journ. of Appl. Mech. — 1980. — V. 47, № 1. — P. 87—92.
  7. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости.—М.: Изд-во АН СССР, 1963.—367 с.
  8. Чобанян К. С. Напряжения в составных упругих телах.—Ереван: Изд-во АН АрмССР, 1987.—338 с.
- НПО «Армсельхозмеханизация».

ЕрШ им. К. Маркса

10, IX, 1987

Изв. АН АрмССР (сер. ТН), т. XLII, № 4, 1989, с. 177—180

### ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

УДК 621.313.322.017

Т. М. ИЗМЕНИ, Р. Е. АКОПЯН, Г. С. СЕМЕНОВА,  
Т. А. НАСЛЯН, Е. А. СААКЯН

### НЕКОТОРЫЕ АЛГОРИТМЫ ТЕПЛОВОЙ ДИАГНОСТИКИ СТАТОРА МОЩНОГО ГИДРОГЕНЕРАТОРА

Предложены алгоритмы, которые позволяют предвидеть возможные превышения аварийных уставок температуры задолго до их реального появления. В связи с частым изменением нагрузок без достижения установившихся температур в системе диагностики предусматривается выполнение прогностических расчетов, основанных на идентификации тепловой модели нестационарного нагрева двух тел реальным кривым нагрева обмотки и сердечника статора.

Ил. 1. Библиогр.: 1 назв.

*Անալիզիված աղտոտումներ իրենք ևն սալիս կանխատեսել ջրմատարձանի հարստար վերադրին անը իրականում նրանք անաղանախոց շատ շուտ:*

*Անտորոշման համակարգում նախատեսվում է կատարել նախադրչական հաշվարկներ, որոնք հիմնավորված են երկու մարմինների անկայուն տարաբան մարմին և ստատորի փափուկի ու միջուկի տարաբան իրական կորի նաշնագմամբ:*

На базе практически имеющихся средств штатного термоконтроля целесообразно построить алгоритмы диагностики теплового со-