

УДК 621.01

К. Г. СТЕПАНЯН, Г. С. АЙРАПЕТЯН, К. С. АРЗУМАНЯН

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПЛОСКИХ МАНИПУЛЯТОРОВ С ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ТОПОЛОГИЕЙ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

В представленной работе разработан метод решения задачи оптимального управления по быстродействию для плоских манипуляторов с параллельной топологией, где требуется определить управляющие силы так, чтобы они обеспечили переход манипулируемого объекта из начального состояния в конечное за кратчайшее время. Для упрощения решения задачи объект вместе с платформой выделяется из состава манипулятора и для них рассматривается аналогичная задача по быстродействию, откуда определяются законы движения объекта. Далее, путем решения задачи динамики оставшихся цепей определяются управляющие силы.

Ил. 3. Библиогр.: 1 назв.

Մշակված է զուգահեռ տալանտրայով հարթ մանիպուլյատորների բառ արագագործության օպտիմալ կառավարման խնդրի լուծման մեթոդ, որտեղ պահանջվում է որոշել ալիպիսի կառավարման ուժեր, որոնք կարճագույն ժամանակամիջոցում ապահովեն անդաշարժող օբյեկտի տեղափոխությունը սկզբնական դիմախից վերջնականը, ենդրի լուծումը պարզեցնելու համար օբյեկտը հենահարթակի հետ միասին առանձնացվում է մանիպուլյատորի կազմից: Երանց համար դիտարկվում է բառ արագագործության համանման խնդիր, որտեղից որոշվում են օբյեկտի շարժման օրենքները: Այնուհետև մնացած շղթաների դինամիկայի խնդրի լուծումը որոշվում են կառավարման ուժերը:

1. Постановка задачи. В работе рассмотрен вопрос управления перемещениями объекта «Е», жестко связанного с платформой  $C_1C_2C_3$  плоского манипулятора с параллельной топологией (рис. 1).

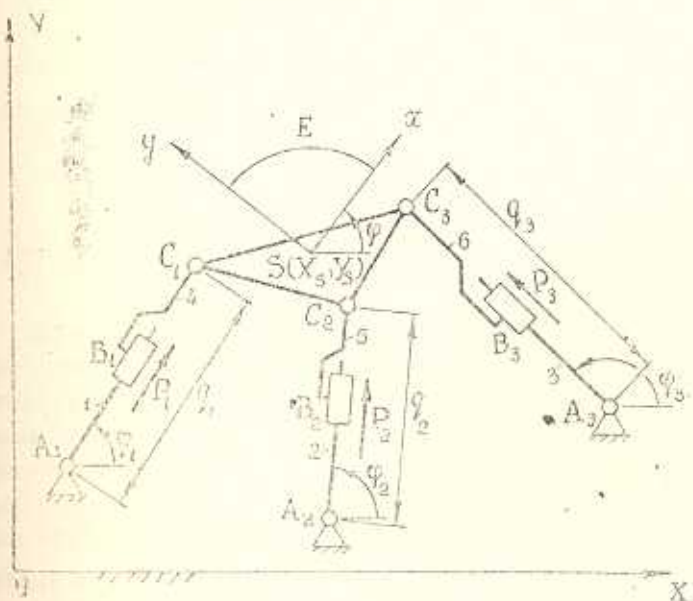


Рис. 1.

Для математического описания решаемой задачи с объектом «Е» жестко свяжем подвижную систему координат  $Sxy$ , начало  $S$  которой совпадает с общим центром масс объекта с платформой. В этом случае состояние объекта в любой момент времени определяется шестью величинами

$$X_S(t), Y_S(t), \varphi(t), \dot{X}_S(t), \dot{Y}_S(t), \dot{\varphi}(t),$$

где  $X_S(t)$ ,  $Y_S(t)$  и  $\dot{X}_S(t)$ ,  $\dot{Y}_S(t)$  — соответственно координаты и проекции вектора скорости точки  $S$  в инерционной системе отсчета  $OXY$ , а  $\varphi(t)$  и  $\dot{\varphi}(t)$  — соответственно угол, образованный положительными направлениями осей  $Sx$  и  $Ox$ , и угловая скорость объекта «Е».

Предположим, что заданы начальные

$$\begin{aligned} X_{S1} &= X_S(t_1), & Y_{S1} &= Y_S(t_1), & \varphi_1 &= \varphi(t_1), \\ \dot{X}_{S1} &= \dot{X}_S(t_1), & \dot{Y}_{S1} &= \dot{Y}_S(t_1), & \dot{\varphi}_1 &= \dot{\varphi}(t_1) \end{aligned} \quad (1)$$

и конечное

$$\begin{aligned} X_{S2} &= X_S(t_2), & Y_{S2} &= Y_S(t_2), & \varphi_2 &= \varphi(t_2), \\ \dot{X}_{S2} &= \dot{X}_S(t_2), & \dot{Y}_{S2} &= \dot{Y}_S(t_2), & \dot{\varphi}_2 &= \dot{\varphi}(t_2) \end{aligned} \quad (2)$$

состояние объекта «Е». Тогда задача оптимального управления по быстродействию формулируется следующим образом: определить законы изменения управляющих (движущих) сил  $P_j$  ( $j=1, 2, 3$ ), действующих в поступательных парах  $B_j$  так, чтобы они обеспечили переход объекта «Е» из начального состояния (1) в конечное (2) за кратчайшее время  $t_{\min} = t_2 - t_1$ .

В технических задачах управляющие силы  $P_j$  и обобщенные скорости  $\dot{q}_j$  манипулятора не могут принимать произвольные значения и подчинены некоторым ограничениям

$$|P_j| \leq |P_{j\max}|, \quad |\dot{q}_j| \leq \dot{q}_{j\max}. \quad (3)$$

Поэтому поставленную задачу необходимо решать при ограничениях (3).

2. *Решение задачи оптимального управления.* Прежде чем привести алгоритм решения поставленной задачи, составим дифференциальные уравнения движения рассматриваемого манипулятора. Не нарушая общности рассуждений, предположим, что его звенья двигаются в горизонтальной плоскости. Расчленим кинематические пары  $C_1$ ,  $C_2$  и  $C_3$ . В результате образуются три двухподвижные цепи  $A_j B_j C_j$  ( $j=1, 2, 3$ ) и с ободное твердое тело в виде платформы  $C_1 C_2 C_3$  вместе с объектом «Е» (рис. 2). В расчлененных парах  $C_j$  приложим реакции  $R_{CjX}$ ,  $R_{CjY}$  удаленных связей. Главный вектор и

главный момент этих реакций, приведенных к центру масс  $S$ , обозначим через  $\bar{M}$  ( $R_x, R_y$ ) и  $M$ , где

$$R_x(t) = \sum_{j=1}^3 R_{Cjx}, \quad R_y(t) = \sum_{j=1}^3 R_{Cjy}. \quad (4)$$

$$M(t) = \sum_{j=1}^3 [-(x_{Cj} \sin \mu + y_{Cj} \cos \varphi) R_{Cjx} + (x_{Cj} \cos \varphi - y_{Cj} \sin \mu) R_{Cjy}].$$

а  $x_{Cj}$  и  $y_{Cj}$  являются координатами точек  $G_j$  в подвижной системе координат  $Sxy$ . Далее составляем дифференциальные уравнения формы с объектом и двухподвижных цепей, которые могут быть представлены в виде

$$m\ddot{X}_S = R_x(t), \quad m\ddot{Y}_S = R_y(t), \quad I_S \ddot{\varphi} = M(t), \quad (5)$$

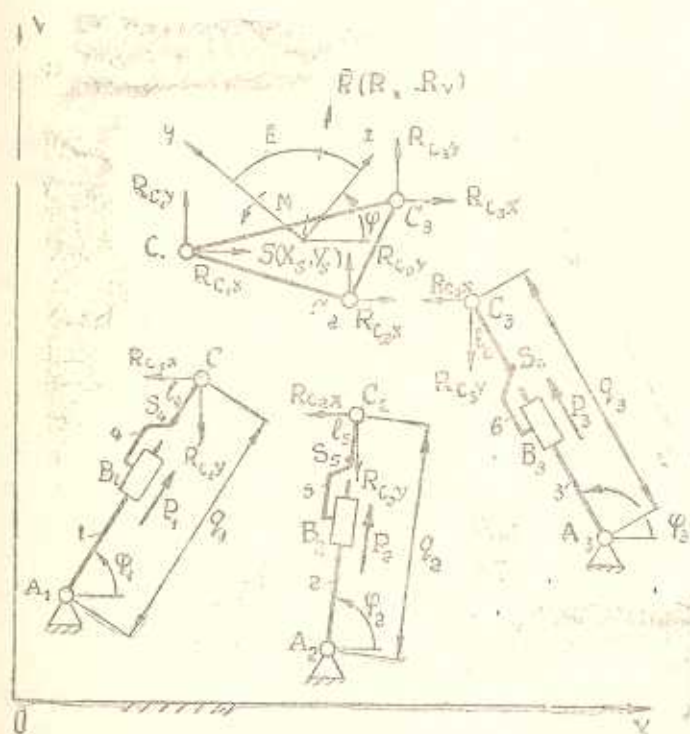


Рис. 3.

$$\begin{aligned} f_{Xj}^{(1)} R_{Cjx} + f_{Yj}^{(1)} R_{Cjy} + f_{Pj}^{(1)} P_j + f_j^{(1)} &= 0, \\ f_{Xj}^{(2)} R_{Cjx} + f_{Yj}^{(2)} R_{Cjy} + f_{Pj}^{(2)} P_j + f_j^{(2)} &= 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} f_{Xj}^{(1)} &= -\cos \varphi_j, & f_{Yj}^{(1)} &= -\sin \varphi_j, & f_{Pj}^{(1)} &= 1, \\ f_j^{(1)} &= -(l_{(j+3)} - q_j) m_{(j+3)} \dot{\varphi}_j^2 - m_{(j+3)} \ddot{q}_j, & f_{Xj}^{(2)} &= q_j \sin \varphi_j, \\ f_{Yj}^{(2)} &= -q_j \cos \varphi_j, & f_{Pj}^{(2)} &= 0. \end{aligned}$$



$$f_j^{(2)} = - (l_{(j+3)} - q_j)^2 m_{(j+3)} \ddot{\varphi}_j + 2(l_{(j+3)} - q_j) m_{(j+3)} \dot{q}_j \dot{\varphi}_j - \\ - I_{S(j+3)} + I_{A_j} \ddot{\varphi}_j,$$

и,  $m_{(j+3)}$ ,  $I_S$ ,  $I_{S(j+3)}$ ,  $I_{A_j}$  — массы и соответствующие моменты инерции звеньев манипулятора.

Уравнения, восстанавливающие удаленные связи, представим в виде

$$X_{Cj} - X_{C'j} = 0, \quad Y_{Cj} - Y_{C'j} = 0, \quad \dot{X}_{Cj} - \dot{X}_{C'j} = 0, \quad \dot{Y}_{Cj} - \dot{Y}_{C'j} = 0, \\ \ddot{X}_{Cj} - \ddot{X}_{C'j} = 0, \quad \ddot{Y}_{Cj} - \ddot{Y}_{C'j} = 0, \quad (7)$$

где

$$X_{Cj} = q_j \cos \varphi_j + X_{A_j}, \quad Y_{Cj} = q_j \sin \varphi_j + Y_{A_j},$$

$$X_{C'j} = X_S + x_{Cj} \cos \varphi - y_{Cj} \sin \varphi, \quad Y_{C'j} = Y_S + x_{Cj} \sin \varphi + y_{Cj} \cos \varphi.$$

Объединив (5) — (7), получим дифференциальные уравнения движения исходного манипулятора, выраженные через лишние переменные параметры  $X_S$ ,  $Y_S$ ,  $\varphi$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$ .

Структура уравнений (5) — (7) достаточно сложна, что препятствует эффективному использованию принципа максимума Понтрягина [1] для определения вышеуказанных управляющих сил  $P_j$ . В связи с этим ниже предлагается упрощенный алгоритм решения поставленной задачи, который основан на следующих соображениях. В уравнениях (5), характеризующих поступательные движения платформы с объектом и вращательное движение относительно центра масс  $S$ , переменные  $X_S$ ,  $Y_S$  и  $\varphi$  разделены. Это позволяет достаточно просто решать задачу оптимального управления по быстродействию отдельно взятого объекта и найти закон  $X_S = X_S(t)$ ,  $Y_S = Y_S(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  его движения. Подставляя эти функции и их первые и вторые производные по времени в уравнения (5) — (7), можем определить управляющие силы  $P_j$ . Согласно принципу максимума Понтрягина каждую функцию закона  $X_S(t)$ ,  $Y_S(t)$ ,  $\varphi(t)$  движения объекта, соответствующего оптимальному управлению по быстродействию, в системе фазовых координат  $tOq$  ( $q = X_S, Y_S, \varphi$ ) необходимо искать в виде двух соприкасающихся парабол рис. 3).

$$q = at^2 + bt + c, \quad \dot{q} = -at^2 + dt + e,$$

коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и  $e$  которых удовлетворяют условиям

$$q_1 = at_1^2 + bt_1 + c, \quad \dot{q}_1 = 2at_1 + b, \quad q_2 = -at_2^2 + dt_2 + e, \\ \dot{q}_2 = -2at_2 + d, \quad at_1^2 + bt_1 + c = -at_2^2 + dt_2 + e, \\ 2at_1 + b = -2at_2 + d. \quad (8)$$

Решением системы (8) относительно искомым параметров  $a, b, c, d, e$  и  $t_1$  определим закон движения объекта.

$$q = \begin{cases} at^2 + bt + c, & \text{если } t_1 \leq t \leq t_q, \\ -at^2 + dt + e, & \text{если } t_q \leq t \leq t_2. \end{cases} \quad (9)$$

С учетом изложенного предлагается следующий алгоритм решения исходной задачи оптимального управления по быстрдействию.

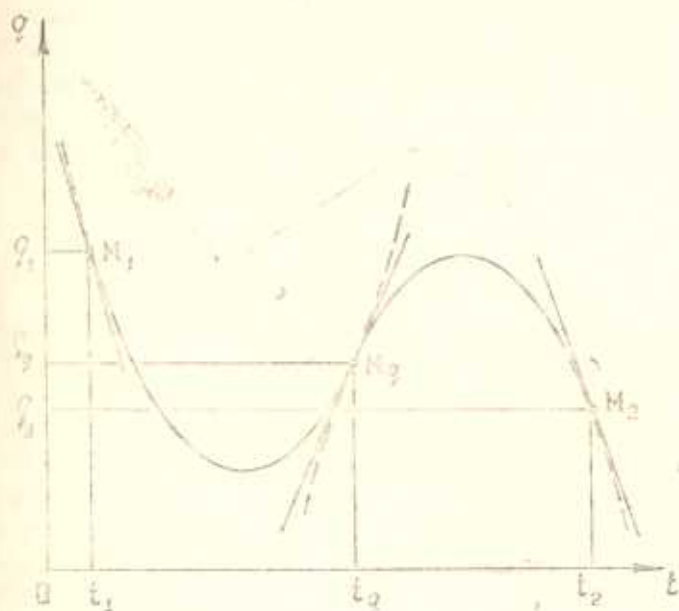


Рис. 3.

2.1. Для заданного начального значения времени  $t_1$  выбираем некоторое его конечное значение  $t_2$  и трехкратным решением системы (8) по формулам (9) определяем закон  $X_s(t), Y_s(t), \varphi(t)$  движения объекта "Е".

2.2. Подставляя эти функции, их первые и вторые производные в уравнения (7) и решая эту систему, определяем обобщенные координаты  $q_j(t), \varphi_j(t)$ , скорости  $\dot{q}_j(t), \dot{\varphi}_j(t)$  и ускорения  $\ddot{q}_j(t), \ddot{\varphi}_j(t)$  кинематических цепей  $A, B, C_j$ .

2.3. Подставляя в (5) и (6) введенные в п. п. 2.1 и 2.2 кинематические параметры  $q_j(t), \dot{q}_j(t), \ddot{q}_j(t), \varphi_j(t), \dot{\varphi}_j(t), \ddot{\varphi}_j(t)$ , с учетом (4) получаем систему линейных уравнений относительно девяти независимых параметров  $R_{CjX}, R_{CjY}$  и  $P_j$ . Решая эту систему, определяем законы изменения управляющих сил  $P_j = P_j(t)$ , которые обеспечивают переход объекта из начального состояния (1) в конечное (2) за выбранное время  $t_{min} = t_2 - t_1$ .

2.4. Вычисляем величины

$$\bar{P}_j = \max_{t \in [t_1, t_2]} |P_j(t)|, \quad \bar{q}_j = \max_{t \in [t_1, t_2]} |q_j(t)| \quad (10)$$

и проверяем условия

$$\tilde{P}_j \leq P_{\max}, \quad \tilde{q}_j \leq q_{j\max}. \quad (11)$$

Если они выполняются и хоть для одного из них имеет место равенство, то процесс прекращаем, а полученные в п. 2.3 силы  $P_j(t)$  будут теми оптимальными управлениями, которые являются решением поставленной задачи. Если же сказанное не выполняется, то выбираем новое значение  $l_2$  и осуществляем переход к п. 2.1 настоящего алгоритма. При этом следует иметь в виду, что уменьшение  $l_{\min}$  приводит к увеличению величин (10) и наоборот. Варьируя таким образом  $l_{\min}$ , добиваемся выполнения условий (11) и решения задачи оптимального управления по быстрдействию.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С. Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1976.—392 с.

ЕрПИ

29. III. 1990

Изв. АН Армении (сер. ТН), т. 45, № 3—4, 1992, с. 78—82

МАШИНОСТРОЕНИЕ

УДК 621.762

Г. К. АСКИДЖЯН, Г. Л. ПЕТРОСЯН

### ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СПЕЧЕННОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ПРОКАТКЕ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Работа посвящена решению задачи прокатки спеченных полос с использованием теории пластичности реальных пористых материалов и зависимостей метода конечных элементов, учитывающих особенности пористости материала. Для учета сложных контактных условий между вращающимися вальцами и прокатываемой заготовки применена модель прокатки с фрикционным слоем.

Ил. 3. Библиогр.: 7 назв.

Աշխատանքում լուծված է ծակոտիկեն նյութերի զլղանման խնդիրը իրական ծակոտիկեն նյութերի պլաստիկության տեսության և վերլուծող տարրերի մեթոդի օգտագործմամբ, որոնք հաշվի են առնում նյութի ծակոտիկենության առանձնահատկությունը: Պատվող լիսեռների և զլղանվող նախապատրաստվածքի միջև բարդ կցման պայմանները հաշվի առնելու համար օգտագործվել է շփական շերտով զլղանման մոդելը:

До настоящего времени при решении задачи прокатки пористых спеченных полос применялся широко известный метод тонких сечений [1—3]. Однако данный метод является приближенным и не мо-