Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 3, 1998, с. 342 - 345.

УДК 658.564:519.83

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.Г. КЮРЕГЯН, Н.С. КЮРЕГЯН

ПОИСК ГРАНИЧНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Օբյեկտների ավտոմատացված կառավարման համակարգերում որոշ օպտիմալացման խնդիրների լուծման համար առաջարկված է փոփոխականների վերին և ստորին սահմանների սահմանափակումներով մի դասի ոչ գծային ծրագրավորման խնդիրների սահմանային լուծումների որոնման եղանակ:

Предложен метод поиска граничных решений класса задач нелинейного программирования с ограничениями на верхние и нижние пределы переменных для решения некоторых оптимизационных задач в системах автоматизированного управления объектами.

Библиогр.: 3 назв.

A method for searching the boundary solutions of nonlinear programming one class problem with upper and lower bounds on the variables for the units automatized control systems of some optimization problem solution is proposed.

Ref. 3.

В системах автоматизированного управления, управления динамическими объектами с дискретным временем, распределения ресурсов, идентификации параметров, проектирования объектов и т.д. часто возникают задачи класса нелинейного программирования:

$$F(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) + \varphi(\mathbf{r}_x) \to \inf_{x \in X^n} F(\mathbf{x}), \tag{1}$$

где $\mathbf{x} = \{x_i\}$ - n-мерный вектор переменных $(i = \overline{1,n})$; $F(\mathbf{x})$ - целевая функция; $f(\mathbf{x})$ - скалярная, непрерывная, нелинейная, дифференцируемая, выпуклая функция переменной $\mathbf{x}$; $\varphi(\mathbf{r}_x)$ - скалярная функция чисел $\mathbf{r}_x = r_i(x_i)$, определяемых постоянными параметрами r_i, ассоциированными с x_i:

$$r_i(x_i) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_i = 0, \\ r_i, \text{ если } x_i \neq 0; \end{cases}$$

$\varphi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (например, $\varphi(\mathbf{r}_x) = \sum_{i=1}^{n} r_i(x_i)$); X^n - допустимая область изменения переменной $\mathbf{x}$ в n-мерном пространстве:

$$X_1^n = \{\mathbf{x} | \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \ j = 1,2\} \tag{2}$$

или

$$X_2^n = \{\mathbf{x} | h(\mathbf{x}) = 0, \ \mathbf{g}_j(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}, \ j = 1,2\}; \tag{3}$$

$h(\mathbf{x})=\mathbf{a}^{T}\mathbf{x}-b=0$ - функция ограничения типа равенства; $g_1(\mathbf{x})=\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$, $g_2(\mathbf{x})=\mathbf{x}_B-\mathbf{x}\geq\mathbf{0}$ - функции ограничений в виде неравенств на нижние и верхние пределы переменных; $\mathbf{a}=\{a_i\}$ - матрица-столбец, $\mathbf{b}$ - положительное число, такие, что $a_i x_{Bi}\leq b$ и $\mathbf{a}^{T}\mathbf{x}_B-\mathbf{b}\geq 0$; индекс "T" означает действие транспонирования; $\mathbf{x}_B=\{x_{Bi}\}$ - вектор верхних пределов переменных.

Допустимая область (2) представляет собой пространство, ограниченное гранями n-мерного выпуклого многогранника, ребра которого равны x_{Bi}, а область (3) - выпуклый многоугольник, образованный пересечением плоскости $h(\mathbf{x})=0$ с n-мерным многогранником.

Предположим, что мы владеем некоторым инструментом, позволяющим определять оптимальные координаты $\mathbf{x}^*$ задачи:

$$\min_{x\in X^2} f(\mathbf{x}). \tag{4}$$

В частности, в задачах квадратичного программирования таким инструментом может служить метод множителей Лагранжа [1].

Расположение координат $\mathbf{x}^*$ в допустимой области X^{II} не гарантирует минимума функции цели (1), если $\varphi(\mathbf{r}_x)>\varphi(\mathbf{r}_x^0)$, где индекс "0" означает наличие в составе вектора одного и более нулевых компонентов. Тогда необходимо проверить все те граничные оптимальные решения $\mathbf{x}_\Gamma^*$ задачи (4), в которых одна или несколько переменных x_i принимают нижние граничные значения $(x_i=0)$, а $f(\mathbf{x}_\Gamma^*)$ принимает свое минимальное значение на данной границе области. Иными словами, задачу можно решить перебором граничных вариантов и сравнением результатов: $\min F=\inf\{F(\mathbf{x}^*), F(\mathbf{x}_\Gamma^*)\}$. Применение известных методов нелинейного программирования [1-3] и существующих стандартных пакетов прикладных программ не даст результата, поскольку получим одно оптимальное решение задачи (4), расположенное либо внутри допустимой области, либо на ее границе. Для получения всех граничных оптимальных решений необходимо каждый раз модифицировать задачу.

Задачу можно существенно упростить, если учесть, что границы допустимой области принадлежат плоскостям рассматриваемой системы координат $\mathbf{x}$. Поскольку для допустимой области X_1^{II} границами являются прямоугольные грани многогранника, а для X_2^{II} - ребра многоугольника, расположенные на этих гранях, то поиск граничных оптимальных решений сводится к двумерной задаче:

$$\min_{x_1\in X^2} f(\mathbf{x}_1), \tag{5}$$

где $\mathbf{x}_1=[x_p;\ x_q]^T$ - двумерный вектор переменных $x_p;\ x_q$, $p,q=\overline{1,n}$, $p\neq q$; X^2 - допустимая область в двумерном пространстве:

$$X_1^2=\{\mathbf{x}_1 \big| \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1)\geq \mathbf{0},\ j=1,2\}, \tag{6}$$

$$X_2^2=\{\mathbf{x}_1 \big| h(\mathbf{x}_1)=0,\ \mathbf{g}_j(\mathbf{x}_1)\geq \mathbf{0},\ j=1,2\}, \tag{7}$$

$h(\mathbf{x}_1)=\mathbf{a}_1^T\mathbf{x}_1-b_1=0$, $\mathbf{g}_1(\mathbf{x}_1)=\mathbf{x}_1\geq\mathbf{0}$, $\mathbf{g}_2(\mathbf{x}_1)=\mathbf{x}_{B1}-\mathbf{x}_1\geq\mathbf{0}$, $\mathbf{a}_1=[a_p;\ a_q]^T$-матрица-столбец; $b_1=b-\mathbf{a}_2^T\mathbf{x}_2$; $\mathbf{a}_2=\{a_K\}$-матрица-столбец; $\mathbf{x}_2=\{x_{\Gamma K}\}$-вектор с граничными значениями компонентов ($x_{\Gamma K}=0$ или $x_{\Gamma K}=x_{\text{вк}}$), $k=\overline{1,n-2}$; $k\neq p$ $k\neq q$. Для определения экстремума двумерной функции (5) можно применить аналитические методы, позволяющие, зачастую, довольно просто рассчитать все граничные оптимальные значения координат: $\mathbf{x}_\Gamma=[\mathbf{x}_1^*;\ \mathbf{x}_2^*]^T$. В случае задания допустимой области в виде (3) поиск граничных решений следует продолжить и для всех $\mathbf{x}_1$ от трехмерных до (n-1)-мерных.

Для организованного поиска граничных оптимальных решений предлагается следующий алгоритм.

1. Если оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ располагается внутри допустимой области X^n, то отпадает необходимость определения граничных решений для $\mathbf{x}_2=\{x_{BK}\}$ в силу неизменности $\varphi(\mathbf{r}_x)$ для этих решений. Тогда можно ограничиться определением $\mathbf{x}_{\Gamma O}$, включающих граничные оптимальные решения на осях координат ($\mathbf{x}_1^*=[x_p^*;\ 0]^T$; $\mathbf{x}_2=\mathbf{0}$) допустимой области (2), на гранях (6) многогранника или принадлежащие области (7) для всех $\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_2^{\text{п}}$ (от (n-2)-мерных до одномерных), а также координаты вершин допустимой области (3), лежащие на осях координат. Оптимальное решение задачи (1) необходимо искать среди $\mathbf{x}^*$ и найденных $\mathbf{x}_{\Gamma O}$ как $\min F=\inf\{F(\mathbf{x}^*),\ F(\mathbf{x}_{\Gamma O})\}$.

2. Если оптимальное решение $\mathbf{x}^*$ не принадлежит допустимой области X^n, то сначала необходимо определить те значения $\mathbf{x}_{\Gamma O}$, которые предписывает п.1. Оптимальное граничное решение $\mathbf{x}_\Gamma^*$ задачи (1) следует искать среди найденных значений $\mathbf{x}_{\Gamma O}$, удовлетворяющих условиям $F(\mathbf{x}_{\Gamma O})<F(\mathbf{x}^*)$; $\min F=\inf F(\mathbf{x}_{\Gamma O})$. Если же среди найденных значений $\mathbf{x}_{\Gamma O}$ нет таких, которые удовлетворяли бы указанному неравенству, то поиск оптимального решения следует осуществлять среди граничных решений $\mathbf{x}_\Gamma^*$ для $\mathbf{x}_2=\{x_{BK}\}$: $\min F=\inf F(\mathbf{x}_\Gamma^*)$.

Как видно, алгоритм поиска граничных решений для исследуемого класса задач нелинейного программирования довольно прост. Для сравнения отметим, что при решении задач, например, квадратичного программирования используется метод множителей Лагранжа [1, 2], а для поиска граничных решений - методы линейного программирования (метод Вольфа) [3]. При этом приходится многократно решать систему из n+m линейных уравнений с помощью симплекс-алгоритма, соблюдая условия обращения в ноль либо функции ограничения, либо соответствующего множителя Лагранжа, где m - общее количество функций ограничений типа неравенства. В результате получим одно граничное решение $x_{г}^{*}$, которое для задачи (1) может оказаться неоптимальным.

Предлагаемый в работе подход, даже в предусматриваемых случаях перебора вариантов решений на границах, значительно упрощает решение класса задач (1) - (3) и легко поддается программной реализации. Множество решений, получаемое в результате перебора некоторых вариантов, близких к оптимальному, может использоваться в задачах управления с принятием решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Химмельблау Д.** Прикладное нелинейное программирование. - М.: Мир, 1975. - 534 с.
2. **Аоки М.** Введение в методы оптимизации. - М.: Наука, 1977. - 344 с.
3. **Дегтярев Ю.И.** Исследование операций. - М.: Высшая школа, 1986. - 320 с.

ГИУА 04.12.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 3, 1998, с. 345 - 351.

УДК 519.95:681.3

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

В.Г. СААКЯН, Д.А. МОВСЕСЯН, Г.С. КЮРЕГЯН

ИССЛЕДОВАНИЕ ВРЕМЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЫ

Բաշխված ինֆորմացիոն համակարգերում սերվերների ինֆորմացիայի զետեղման և տեղաբաշխման արդյունավետության բարձրացման համար առաջարկվում են ստատիստիկ փորձարկումների մեթոդներ: Ստացված տվյալների հիման վրա հետազոտվում են մոդելավորվող համակարգի ժամանակային բնութագրերը և հերթերի երկարությունները: Առաջարկվում է համակարգի սերվերների ինֆորմացիայի բաշխման բարելավման ալգորիթմ:

Предлагаются методы статистических испытаний для оценки и повышения эффективности размещения информации на серверах в распределенных информационных системах. На основе полученных результатов исследуются временные характеристики и длины очередей в моделируемой системе. Предлагается алгоритм улучшения распределения информации по серверам системы.

Ил. 1. Библиогр: 5 назв.