$$+\mathrm{ch}(\pi n x/b)/\mathrm{sh}(\pi n a/b)\int\limits_{x_0-R}^{x_0+R}\mathrm{ch}(\pi n(a-\eta)/b)\times$$

$$\times\sin(\pi n\sqrt{R^2-(\eta-x_0)^2}/b)d\eta\Big].$$

Таким образом, на основании полученных аналитических выражений распределения магнитного поля описывается характер картины магнитного поля в окне магнитопровода при разных габаритных размерах магнитопровода, положениях проводника с током и разных диаметрах.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бинс К., Лауренсон П.** Анализ и расчет электрических и магнитных полей. - М.: Энергия, 1970. - 375с.
2. **Бухгольц Г.** Расчет электрических и магнитных полей: Пер. с нем.- М.: Изд.-во иностр. лит., 1971. - 712 с.
3 **Тихонов А.Н. Самарский А.А.** Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1972. - 735 с.

ГИУА

03.10.1996

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 3, 1998, с. 338 - 341.

УДК 62-50

АВТОМАТИЗАЦИЯ И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ

С.О. СИМОНЯН, П.Э. ГУКАСЯН

РАСЩЕПЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ТЕЙЛОРОВСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

Առաջարկված է գծային դինամիկ համակարգերի ճեղքման արդյունավետ մեթոդ՝ հիմնված դիֆերենցիալ-թեյլորյան ձևափոխությունների վրա: Դիտարկված է մոդելային օրինակ:

Предложен эффективный метод расщепления линейных динамических систем на основе дифференциально-тейлоровских преобразований. Рассмотрен модельный пример.

Библиогр: 3 назв.

An efficient method of linear dynamic system splitting based on differential-Taylor transformations has been suggested. A model sample has been considered.

Ref. 3.

1. Рассмотрим линейную неавтономную задачу Коши, описываемую уравнением движения

$$\dot{x}(t)=A(t)\cdot x(t)+W(t),\ x(t_0)=\text{fix}, \qquad (1)$$

где $A(t)=[a_{ij}(t)];\ i,j=\overline{1,n}$- полноранговая матрица порядка n с гладкими элементами; $W(t)=(W_1(t),\ldots,W_n(t))$- вектор возмущающих воздействий размерами $n\times 1$ с гладкими элементами; $x(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))^T$-вектор искомых переменных состояния размерами $n\times 1$.

Известно [1], что нахождение аналитического решения этой задачи сводится к определению переходной матрицы $\Phi(t,t_0)=\exp[A(t-t_0)]$ системы (1), что сравнительно легко осуществляется при выполнении хотя бы одного из следующих трех условий:

$$A(t)=A=\text{const}\ \text{(условие стационарности)}, \qquad (2)$$

$$A(t)=\text{diag}(a_{ii}(t))\ \text{(условие диагональности)}, \qquad (3)$$

$$A(\tau)\cdot A(\theta)=A(\theta)\cdot A(\tau)\ \text{(условие коммутативности)}. \qquad (4)$$

Что касается общего случая, то обычно пользуются методами матрицанта или возмущений, вычислительные затруднения при применении которых хорошо известны.

Теперь допустим, что матрица $A(t)$ системы (1) не удовлетворяет ни одному из условий (2), (3) или (4). Используя преобразование подобия

$$x(t)=S(t)\cdot y(t) \qquad (5)$$

(где $S(t)=[s_{ij}(t)];\ i,\ j=\overline{1,n}$ - искомая полноранговая матрица порядка n, а $y(t)=(y_1(t),\ldots,y_n(t))^T$- вектор преобразованных переменных состояния размерами $n\times 1$), систему (1) сведем к следующей эквивалентной ей задаче:

$$\dot{y}(t)=[S^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot S(t)-S(t)^{-1}\cdot\dot{S}(t)]\cdot y(t)+S^{-1}(t)\cdot W(t), \qquad (6)$$

$$y(t_0)=S^{-1}(t_0)\cdot x(t_0). \qquad (7)$$

Имея в виду (3), как наиболее целесообразный вариант, допускающий прямое интегрирование, потребуем, чтобы выполнялось условие

$$S^{-1}(t)\cdot A(t)\cdot S(t)-S^{-1}(t)\cdot\dot{S}(t)=\Lambda(t)=\text{diag}(\lambda_{ii}(t)), \qquad (8)$$

где $\Lambda(t)$ - диагональная матрица порядка n с элементами, равными характеристическим числам $\lambda_{ii}(t),\ \ i=\overline{1,n}$ матрицы $A(t)$ (иными словами, систему (6) сведем к некоторой гипотетической неавтономной расщепляющейся системе). При этом из (8) легко порождается следующая матричная задача Коши:

$$\dot{S}(t)=A(t)\cdot S(t)-S(t)\cdot\Lambda(t),\ S(t_0)=?, \qquad (9)$$

что является частным случаем матричного уравнения Риккати, а точнее - непрерывным аналогом неявного матричного уравнения Сильвестра [2].

Таким образом, исходная задача сводится к определению такой матрицы $S(t_0)$, при которой решение $S(t)$ матричного дифференциального уравнения (9) обеспечивает полное расщепление векторного дифференциального уравнения (6). Поэтому очевидно, что при условии (8) в качестве такой матрицы однозначно должна выступать матрица, составленная из собственных векторов матрицы $A(t_0)$ (ибо при $t=t_0$ задача (1) вырождается в автономную задачу, обладающую отмеченным свойством).

2. При разработке эффективных вычислительных процедур с целью решения различных систем дифференциальных уравнений широкие возможности предоставляют так называемые дифференциально-тейлоровские (ДТ) преобразования [3]:

$$x(t)=\sum_{K=0}^{\infty}\left(\frac{t-t_i}{H}\right)^K X(K) \;\bar{\bar{\cdot}}\; X(K)=\frac{H^K}{K!}\left(\frac{\partial^K x(t)}{\partial t^K}\right)_{t=t_i}, \tag{10}$$

где $x(t)$ - оригинал; $X(K)$ - изображение (дискрета); H - масштабная постоянная; t_i - центр аппроксимации; $\bar{\bar{\cdot}}$ - знак перехода из области оригиналов в область изображений и наоборот.

Систему (9) из области оригиналов переведем в область ДТ-изображений. При этом соответствующая явная спектральная модель имеет вид

$$\frac{K+1}{H}S(K+1)=\sum_{\ell=0}^{K}A(\ell)\cdot S(K-\ell)-\sum_{\ell=0}^{K}S(\ell)\Lambda(K-\ell),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{11}$$

$$S(0)=S(t_0), \tag{12}$$

согласно которой легко могут быть определены матричные дискреты $S(1),\ S(2),\dots$.

Явная спектральная модель системы (6)-(8) имеет вид

$$\frac{K+1}{H}Y(K+1)=\sum_{\ell=0}^{K}\Lambda(\ell)Y(K-\ell)+\sum_{\ell=0}^{K}S^{-1}(\ell)\cdot W(K-\ell),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{13}$$

$$Y(0)=S^{-1}(t_0)\cdot X(t_0)=S^{-1}(0)\cdot X(0), \tag{14}$$

откуда с учетом (11) и (12) последовательно можно определить векторы $Y(1), Y(2),\dots$

Что касается определения векторов $X(1), X(2)$, то этого можно легко достичь на основе рекуррентной процедуры, порождающейся явной спектральной моделью

$$X(K)=\sum_{\ell=0}^{K}S(\ell)\cdot Y(K-\ell),\ K=\overline{0,\infty}, \tag{15}$$

соответствующей преобразованию подобия (5).

Решение задачи X(t) можно определить согласно (10) с точностью до некоторой конечной суммы ряда Тейлора.

Пример [3]:

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{1+t} & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{t(2-t)}{2(1+t)}\end{pmatrix},\quad X_1(0)=1.$$

Допустив, что $t=0$, имеем

$$A(0)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix};\ A(K)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ (-1)^K & 0\end{bmatrix},\ \forall K\geq 1;$$

$$\Lambda_{1,2}(0)=\pm 1;\ \Lambda_{1,2}(1)=\mp H/2;\ \Lambda_{1,2}(2)=\pm\frac{3}{8}H^2;$$

$$\Lambda_{1,2}(3)=\mp\frac{15}{48}/H^3,\ldots;$$

$$\Lambda_1(t)=1-\frac{1}{2}t+\frac{3}{8}t^2-\frac{15}{48}t^3,\ldots\ \Lambda_2(t)=-1+\frac{1}{2}t-\frac{3}{8}t^2+\frac{15}{48}t^3,\ldots;$$

$$W(0)=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix};\ W(1)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}H;\ W(K)=\begin{pmatrix}0\\ (-1)^{K-1}\cdot\frac{3}{2}\end{pmatrix}H^K,\ \forall K\geq 2;$$

$$S(0)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix};\ S(1)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}H;\ S(2)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{bmatrix}0{,}25H^2,\ldots;$$

$$S(t)=\begin{bmatrix}1+0{,}25t^2\ldots & 1-0{,}25t^2\ldots\\ 1-0{,}25t^2\ldots & -1-0{,}25t^2\ldots\end{bmatrix};$$

$$Y(0)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0{,}5\end{pmatrix};\ Y(1)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ -0{,}5\end{pmatrix}H;\ Y(2)=\begin{pmatrix}3/8\\ 1/8\end{pmatrix}H^2,\ldots;$$

$$Y(t)=\begin{pmatrix}0{,}5+0{,}5t+\frac{3}{8}t^2\ldots\\ 0{,}5-0{,}5t+\frac{1}{8}t^2\ldots\end{pmatrix};$$

$$X(0)=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix};\ X(1)=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}H;\ X(2)=\begin{pmatrix}0{,}5\\ 0\end{pmatrix}H^2,\ldots;$$

Следовательно,

$$x_1(t)=1+t^2/2,\ x_2(t)=t,$$

что полностью совпадает с решением, полученным в [3, с. 266].

Предложенный метод может быть успешно применен в практических целях, когда решение задачи требуется определить в окрестности начальной точки в простой аналитической форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Чаки Ф.** Современная теория управления.-М.: Мир, 1975. - 424 с.
2. **Simonyan S.H., Goukassyan P.E.** On the Method of Matrix Equation // International Conference on "Application of Critical Technologies for the Need's of Society".-Yerevan, 1995. - P.
3. **Пухов Г.Е.** Дифференциальные преобразования функций и уравнений: - Киев: Наукова думка, 1984. - 420с.

ГИУА

26.12.1996