

Э.П. АЩИАЦ

К ВОПРОСУ О РАЗГОНЕ ЖИДКОСТИ В ТРУБОПРОВОДЕ

Рассматривается нестационарный процесс в напорном трубопроводе, возникающий при переходе жидкости из состояния покоя в состояние установившегося движения. Получены аналитические зависимости, более реально определяющие гидродинамические параметры нестационарного процесса по всей длине водовода.

Ключевые слова: разгон жидкости, упругие свойства, давление, скорость.

При проектировании напорных систем возникает необходимость определения гидродинамических параметров переходного процесса, возникающего при разгоне жидкости в трубопроводе. Существующие методы определения указанных параметров в основном базируются на интегрировании дифференциальных уравнений “жесткого” гидравлического удара [1], что искажает физику явления.

Целью работы является получение более общих аналитических зависимостей, учитывающих упругие свойства жидкости и трубопровода.

Рассматривается случай, когда к напорному резервуару с постоянным горизонтом воды на свободной поверхности подсоединен горизонтальный трубопровод длиной ℓ , на конце которого имеется затвор. При закрытом затворе жидкость в трубопроводе находится в состоянии покоя, и пьезометрический напор по всей длине водовода равен H_0 .

При “мгновенном” открытии затвора возникает истечение жидкости из трубы в атмосферу с возрастающей скоростью. Через некоторый промежуток времени значение скорости достигает предельного установившегося значения, равного $\sqrt{2gH_0}$.

Для решения задачи используется система уравнений гидравлического удара для идеальной жидкости [2]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial H}{\partial x} = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} \right), \\ -\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x}, \end{cases} \quad (1)$$

где $H(x,t)$ – напор в сечении трубы; $V(x,t)$ – средняя в живом сечении трубы скорость жидкости; a – скорость распространения волны гидравлического удара; g – ускорение силы тяжести; x – продольная координата оси трубы; t – текущее время.

Дифференцируя первое уравнение системы (1) по x , а второе по t и складывая их, получим

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} - \frac{\alpha^2}{g} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^2 = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\alpha^2}{g} V \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (2)$$

Имея в виду, что $\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{g}{a^2} \frac{\partial H}{\partial t}$, и пренебрегая слагаемым $\frac{a^2}{g} V \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}$,

получим дифференциальное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{g}{a^2} \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right|^2 = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Это уравнение отличается от волнового уравнения свободных колебаний наличием слагаемого $\frac{g}{a^2} \left| \frac{\partial H}{\partial t} \right|^2$, указывающего на затухающий характер колебаний напора, при этом затухание пропорционально квадрату скорости. В существующей литературе по гидравлическому удару этому обстоятельству уделяется мало внимания. Как правило, в дифференциальных уравнениях конвективным членом пренебрегают, и затухание колебаний приписывается влиянию сил трения. Между тем, как показывает полученное уравнение (3), затухание колебаний имеет место и в случае идеальной жидкости.

Уравнение (3) интегрируется при следующих начальных и граничных условиях:

$$\begin{cases} H(x,0) = H_0; \left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \\ H(0,t) = H_0; H(\ell,t) = 0. \end{cases} \quad (4)$$

С целью получения аналитической зависимости линеаризуем уравнение (3) способом, рекомендуемым И.А. Чарным [2]. Для этого оценим значение абсолютной величины производной $\partial H / \partial t$. Разделяя переменные x и t в (3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение затухающих колебаний, из которого определяется значение $\partial H / \partial t$ [3]:

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sqrt{\frac{B}{2D^2} [(1 - 2DH) - (1 - 2DH_0)e^{2D(H_0 - H)}]}, \quad (5)$$

где $B = \left(\frac{\pi a}{\ell} \right)^2$, $D = g/a^2$.

Приняв среднее значение пьезометрического напора при нестационарном процессе равным $H_0/2$, из (5) получим $\left. \frac{\partial H}{\partial t} \right|_{\text{cp}} = \frac{\pi a^2 \sqrt{2gH_0}}{2g\ell}$.

Имея среднее значение $\partial H / \partial t$, линеаризуем уравнение (3):

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + \frac{\pi \sqrt{2gH_0}}{2\ell} \frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Обозначая $\frac{\pi \sqrt{2gH_0}}{2\ell} = 2m$, получим известное телеграфное уравнение вида

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} + 2m \frac{\partial H}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}. \quad (7)$$

Интеграл этого уравнения при указанных условиях (4) имеет вид [4]

$$H(x, t) = H_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) - \frac{2H_0 \ell^{-mt}}{\pi} \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \left(\cos q_n t - \frac{m}{q_n} \sin q_n t \right) \sin \frac{n\pi x}{\ell}, \quad (8)$$

где $q_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi a}{\ell}\right)^2 - m^2}$.

Анализ уравнения (8) показывает, что внутри колонны жидкости при нестационарном процессе существуют колебания давления, которые с течением времени затухают.

Имея зависимость для напора, из второго уравнения системы (1) определяется соответствующая зависимость для скорости $V(x, t)$:

$$V(x, t) = \sqrt{2gH_0} (1 - e^{-mt}) + \frac{2gH_0 e^{-mt}}{a\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{n} \sin q_n t \cdot \cos \frac{n\pi x}{\ell}. \quad (9)$$

Из полученной зависимости видно, что при $t \rightarrow \infty$ скорость течения жидкости стремится к величине $\sqrt{2gH_0}$.

На рисунке представлен график изменения скорости течения жидкости в конце трубопровода при нестационарном движении, построенный с помощью полученной зависимости (9) (кривая 1). Здесь же приведена кривая 2, определяющая изменение скорости течения в случае, когда не учитываются упругие свойства жидкости и трубопровода. Указанные кривые построены при

следующих численных значениях расчетных параметров: $H_0=100$ м, $\ell = 1000$ м/с, $a=1000$ м/с, $g = 9,81$ м/с².

Из графика (кривая 1) видно, что в начале нестационарного процесса имеют место резкие колебания скорости течения жидкости, которые с течением времени затухают. В этот промежуток времени увеличение скорости происходит быстрее, чем при “жестком” гидравлическом ударе.

В случае, когда амплитуда колебаний скорости близка к нулю, указанные кривые 1 и 2 совпадают.

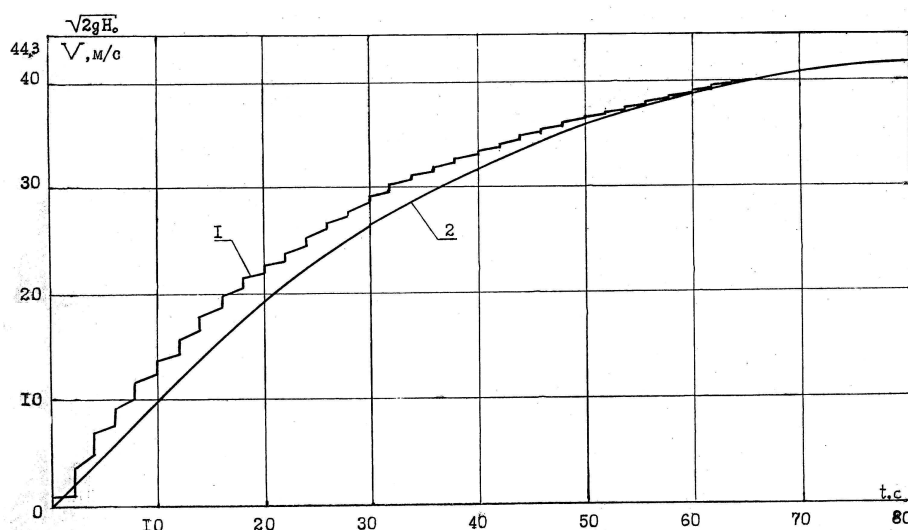


Рис. Расчетные кривые изменения скорости течения жидкости в трубопроводе при переходном процессе

Таким образом, на основании вышеизложенного можно прийти к следующим выводам:

1. Анализ дифференциальных уравнений гидравлического удара с учетом влияния скоростного напора показывает, что колебания давления и скорости течения жидкости при нестационарном процессе являются затухающими, независимо от того, жидкость идеальная или реальная.

2. Получены аналитические зависимости, более реально определяющие гидродинамические параметры нестационарного процесса по всей длине водовода.

