Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 2, 1998, с. 123-127.

УДК 539.30:620.1 **МАШИНОСТРОЕНИЕ**

С.Х.ГЕВОРКЯН, А.А. ГУРГЕНЯН, Н. УЗУНОГЛУ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСА РАЗРЫВА ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ ВОЛНОВОДЕ

Ուսումնասիրվում է գլանային ալիքատարում դեֆորմացիայի խզման իմպուլսի տարածման խնդիրը, երբ գրգռումը աղբյուրում նկարագրվում է Դիրակի ֆունկցիայով: Որոշված է տեղափոխությունների և լարումների դաշտը՝ կախված ալիքատարի նյութի մեխանիկական հատկություններից:

Изучается задача распространения импульса разрыва деформации в цилиндрическом волноводе, когда возмущение в источнике описывается при помощи функции Дирака. Определены поля перемещений и напряжений в зависимости от механических свойств материала волновода.

Библиогр.: 4 назв.

The problem of excitement rupture impulse propagation in the source is described by Dirac's function. Depending on mechanical properties of waveguide material the fields of displacements and stresses are determined.

Ref. 4.

Вопросам распространения упругих волн посвящено много работ [1-4] и др. В настоящей работе рассматривается задача распространения импульса разрыва деформации в цилиндрическом волноводе. Получены выражения полей перемещений и напряжений. При малых значениях радиуса волновода проводится сравнительная оценка нормальных напряжений.

Поместим начало цилиндрической системы координат (r,φ,x) на оси волновода радиуса R, направляя Ox по оси волновода. Допустим, что в момент времени $t=0$ в начале координат вследствие разрыва деформации производится возмущение, которое можно представить в виде

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=-\frac{A}{a}\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right), \tag{1}$$

где U_0 - компонента перемещения по оси Ox; δ - функция Дирака; a - скорость распространения продольных упругих волн; A - постоянный коэффициент.

Для исследования распространения упругих волн удобно пользоваться дифференциальными уравнениями движения в перемещениях, которые в цилиндрических координатах для осесимметричной задачи имеют вид

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}-\frac{u_r}{r^2}+\frac{\partial u_x}{\partial x\partial r}\right)+b^2\left(\frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u_x}{\partial x\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}=(a^2-b^2)\left(\frac{\partial u_r}{\partial x\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial x}\right)+a^2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+b^2\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_x}{\partial x}\right), \qquad (2)$$

где $a=\left(\frac{\lambda+2\mu}{\rho}\right)^{1/2}$, $b=(\mu/\rho)^{1/2}$ - скорости продольных и поперечных волн соответственно; λ и μ - коэффициенты Ламе; ρ - плотность материала волновода.

Напряжения выражаются через перемещения по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\sigma_{rr}&=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu\frac{\partial u_r}{\partial r},\\
\sigma_{xx}&=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu\frac{\partial u_x}{\partial x},\\
\sigma_{\varphi\varphi}&=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu\frac{u_r}{r},\\
\sigma_{xr}&=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{\partial u_r}{\partial x}\right).
\end{aligned} \qquad (3)$$

Предположим, что боковая поверхность волновода свободна от нагрузки:

$$\sigma_{rr}(\xi,x,t)=0,\ \ \sigma_{rx}(\xi,x,t)=0. \qquad (4)$$

Представляя компоненту вектора перемещения в виде $u_x=u_{1x}+u_0$, где u_0 на основании (1) удовлетворяет системе уравнений (2), из (3) и (4) получим граничные условия для u_{1x}, u_r:

$$\begin{aligned}
&\left[\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{u_r}{r}\right)\right]_{r=\xi}=\Phi(x,t),\\
&\left(\frac{\partial u_r}{\partial x}+\frac{\partial u_x}{\partial r}+\frac{u_r}{r}\right)_{r=\xi}=0,
\end{aligned} \qquad (5)$$

где

$$\Phi(x,t)=\frac{A}{a}\lambda\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right).$$

Система уравнений (2) решается при помощи метода интегральных преобразований Лапласа и Фурье [3]. Для преобразованных величин компонент перемещения система уравнений (2) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_r}{\partial r}-\bar{\bar{u}}_r\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{\alpha^2 b^2}{a^2}+\frac{1}{r^2}\right)+i\alpha\frac{\partial \bar{\bar{u}}_{1x}}{\partial r}\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)=0,\\
&\frac{\partial^2 \bar{\bar{u}}_{1x}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial \bar{\bar{u}}_{1x}}{\partial r}-\bar{\bar{u}}_{1x}\left(\frac{p^2+\alpha^2 a^2}{b^2}\right)+i\alpha\left(\frac{a^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\partial \bar{\bar{u}}_r}{\partial r}+\frac{\bar{\bar{u}}_r}{r}\right)=0.
\end{aligned} \qquad (6)$$

Граничные условия (5) записываются в виде

$$\left[(\lambda+2\mu)\frac{\partial \bar{\bar{u}}_r}{\partial r}+\lambda\frac{\bar{\bar{u}}_r}{r}+i\alpha\bar{\bar{u}}_{1x}\right]\Bigg|_{r=\xi}=\bar{\bar{\phi}},$$

$$\left(\frac{\partial\bar{\bar{u}}_{1x}}{\partial x}+i\alpha\bar{\bar{u}}_r\right)\Bigg|_{r=\xi}=0, \tag{7}$$

где

$$\bar{\bar{u}}(r,p,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}dx\int_0^{\infty}e^{-pt}u(r,p,\alpha)dt,$$

$$\bar{\bar{\phi}}(p,\alpha)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-i\alpha x}dx\int_0^{\infty}e^{-pt}\frac{A\lambda}{a}\delta\left(t-\frac{|x|}{a}\right)dt=\frac{A\lambda p}{\pi(p^2+\lambda^2a^2)}.$$

Решение (6) находим в виде

$$\bar{\bar{u}}_r=A_1\frac{\partial}{\partial r}[J_0(\beta_1 r)]+A_2\alpha J_1(\beta_2 r),$$

$$\bar{\bar{u}}_{1x}=i\alpha A_1J_0(\beta_1 r)+iA_2\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rJ_1(\beta_2 r)], \tag{8}$$

где $J_0(z)$ и $J_1(z)$ - функции Бесселя; A_1, A_2 - функции от α и p, которые определяются из граничных условий (7).

Подставляя значения $\bar{\bar{u}}_r$ и $\bar{\bar{u}}_{1x}$ из (8) в (6), для β_1 и β_2 получим

$$\beta_1^2=\left(\alpha^2+\frac{p^2}{a^2}\right),\quad \beta_2^2=-\left(\alpha^2+\frac{p^2}{b^2}\right). \tag{9}$$

Удовлетворяя граничным условиям (7), получим уравнения для определения A_1 и A_2, решения которых запишутся в виде

$$A_1=\frac{\bar{\bar{\phi}}}{F}\left(2\alpha^2+\frac{p^2}{b^2}\right)J_1(\beta_2\xi),$$

$$A_2=\frac{\bar{\bar{\phi}}}{F}2\alpha\beta_1J_1(\beta_1\xi), \tag{10}$$

где

$$F=\left[\frac{2\alpha\beta_1}{\xi}J_1(\beta_1\xi)+(\alpha\frac{p^2}{a^2}-2\mu\beta_1^2)J_0(\beta_1\xi)\right]\times$$

$$\times(2\alpha^2+\frac{p^2}{b^2})J_1(\beta_2\xi)+2\mu_\alpha\beta_2\cdot2\alpha\beta_1J_1(\beta_1\xi)\left[J_0(\beta_2\xi)-\frac{1}{\beta_2\xi}J_1(\beta_2\xi)\right].$$

Используя (10) и (8), можно при помощи обратного преобразования получить окончательное решение. Однако интегралы, входящие в формулы обратного преобразования, в простом виде записать не удается. Поэтому рассмотрим случай малых $\beta_1\xi$ и $\beta_2\xi$, для которых в разложении функции Бесселя берутся только первые члены, в соответствии с чем получим

$$F=\frac{\xi(3\lambda+2\mu)}{2a^2}p^2\beta_2\left(\alpha^2+\frac{p^2}{c_e^2}\right),$$

$$A_1=\frac{\overline{\overline{\Phi}}}{F}\left(2\alpha^2+\frac{p^2}{b^2}\right)\frac{\beta^2\xi}{2},\quad A_2=\frac{\overline{\overline{\Phi}}}{F}\alpha\beta_1\xi, \tag{11}$$

где $c_e^2=\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\rho}=\frac{E}{\rho}$ - скорость одномерных стержневых волн с осевой симметрией.

Определив u_r и u_x на основании (11), при помощи обратного преобразования находим u_r и u_x:

$$u_r=\begin{cases}\frac{A}{2a}\frac{\lambda r}{\lambda+\mu}, & x=0,\ t=0,\\ \frac{A}{4a}\frac{\lambda r}{\lambda+\mu}\delta\left(\frac{C_e t-|x|}{a}\right), & 0<|x|<\infty,\end{cases} \tag{12}$$

$$u_x=u_{1x}+u_0=Ax\begin{cases}0, & 0<|x|<C_e t,\\ -1/2, & |x|=C_e t,\\ -1, & C_e t<|x|<at,\\ 1/2, & |x|<at,\\ 1, & at<|x|<\infty.\end{cases}$$

Используя (12) и (3), после некоторых преобразований для напряжений получим

$$\sigma_{\varphi\varphi}=\sigma_{rr}=-\frac{A}{2a}\lambda\delta\left(\frac{C_e t-|x|}{a}\right),$$

$$\sigma_{xx}=-\frac{A}{2a}\frac{(\lambda^2+6\lambda\mu+4\mu^2)}{\lambda+\mu}\delta\left(\frac{C_e t-|x|}{a}\right), \tag{13}$$

$$\sigma_{xr}=\frac{A}{4a}\frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}\frac{r}{C_e t-|x|}\delta\left(\frac{C_e t-|x|}{a}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{rr}}=\frac{\lambda^2+6\lambda\mu+4\mu^2}{\lambda(\lambda+\mu)}=2(1/\nu-\nu-1), \tag{14}$$

где ν - коэффициент Пуассона.

Следовательно,

$$|\sigma_{xx}|>4|\sigma_{rr}|. \tag{15}$$

Таким образом, в случае малых радиусов цилиндрических волноводов поля перемещений и напряжений, распространяющиеся с постоянной скоростью, вследствие первоначального разрыва деформации волновода выражаются при помощи единичной импульсной функции Дирака. Причем осевое нормальное напряжение более чем в четыре раза превышает радиальное напряжение. При помощи предложенных решений можно определить поля перемещений и напряжений в составном цилиндрическом волноводе с покрытием. Для этого следует дополнительно к приведенному решению в области покрытия представить перемещения через функцию Бесселя первого и второго родов и удовлетворить соответствующие граничные условия равенства перемещений и напряжений на поверхности контакта, а также условия на внешней поверхности покрытия. Используя предложенный подход, с достаточной точностью можно оценить влияние импульса разрыва деформации на напряженное состояние волновода, что делает возможным применение полученных результатов в волоконно-оптических системах связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. - М.: Изд-во АН СССР, 1957. - 502 с.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
3. **Багдоев А.Г.** Определение фундаментальных решений для уравнений магнитоупругости // Изв. АН АрмССР. Механика. - 1974. - Т. 27, № 2. - С. 36-47.
4. **Геворкян С.Х., Узуноглу Н.** Распространение крутильных волн в составном волноводе // Изв. НАН РА и ГИУА. Сер. ТН. - 1997. - Т. 50, № 2. -С.73-76.

ГИУА, ЕрАСИ,
Нац. Техн. ун-т Афины

02.05.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 2, 1998, с. 127-132.

УДК 678.057:620.17:539.4:539.37 МАШИНОСТРОЕНИЕ

К.А. КАРАПЕТЯН, Н.Е. САРКИСЯН, А.Г. ХАЧИКЯН

ПРОЧНОСТЬ И ДЕФОРМАТИВНОСТЬ СЛОИСТЫХ ПЛАСТИКОВ ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ

Հետազոտված են գործվածքային ապակեպլաստե խողովակաձև փորձանմուշների ամրությունը և դեֆորմատիվ հատկությունները առանցքային ձգման ու ոլորման բարդ բեռնավորման պայմաններում: Հաստատված է, որ փորձանմուշների նախնական առանցքային ձգումը հանգեցնում է նրանց ոլորման ամրության էական մեծացմանը:

Исследованы прочностные и деформационные свойства трубчатых образцов из тканевых стеклопластиков при комбинированном воздействии осевого растягивающего усилия и крутящего момента в условиях сложного