4. **Позняк Э.Л.** Нелинейные колебания роторов на подшипниках качения // Изв. вузов. Машиностроение. - 1971. - № 1. - С. 40-46.
5. **Деч Г.** Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. - М.: Наука, 1971.- 520 с.
6. **Papoulis A.A.** New method of inversion of the Laplace transform // Quarterly of applied mathematics. - 1957.- № 14. - P.

Военный институт МО РА 20.11.1997

Изв. НАН и ГИУ Армении (сер. ТН), т. LI, № 1, 1998, с. 7 - 11.

УДК 539.30:620.1

МАШИНОСТРОЕНИЕ

С.Х.ГЕВОРКЯН, Н. УЗУНОГЛУ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СОСТАВНОМ ВОЛНОВОДЕ

Ուսումնասիրվում է երկայնական ալիքների տարածման խնդիրը գլանային առաձգական ալիքատարի՝ ծածկույթ ունենալու դեպքում: Որոշված է երկայնական ալիքների տարածման արագության կախվածությունը ալիքատարի և ծածկույթի նյութերի մեխանիկական հատկություններից:

Изучается задача распространения продольных волн в случаях, когда упругий цилиндрический волновод имеет покрытие. Определена зависимость скорости распространения продольных волн от механических свойств материалов волновода и покрытия.

Библиогр.: 4 назв.

The problem of longitudinal wave propagation when the elastic cylindrical waveguide has a coating is studied. The dependence of longitudinal wave propagation on mechanical properties of the waveguide and coating materials is determined.

Ref. 4.

Вопросам распространения упругих волн в слоистых средах посвящено много работ, среди которых можно отметить [1, 2, 4]. В настоящей работе рассматривается задача распространения продольных волн в составном упругом цилиндрическом волноводе с малым по сравнению с толщиной упругого покрытия радиусом при различных физико-механических свойствах материалов волновода и покрытия. Получено дисперсионное уравнение, в некоторых предельных случаях определены скорости распространения продольных волн.

Пусть ось цилиндрического волновода совпадает с осью z, а радиус волновода равен R. Принимается, что продольная волна распространяется параллельно оси z с фазовой скоростью C. Предполагается, что волна характеризуется осевой симметрией относительно оси z. В дальнейшем все величины, относящиеся к волноводу, будем отмечать индексом 1, а величины, относящиеся к упругой среде покрытия, верхним индексом 2.

Для решения задачи воспользуемся волновыми потенциалами $\Phi^{(i)}$ и $\Psi^{(i)}$ $(i=1,2)$. Волновые уравнения в силу предположенной симметрии деформации относительно оси z имеют вид [2]

$$\left(\Delta-\frac{1}{C_1^{(1)^2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi^{(1)}=0,\quad \left(\Delta-\frac{1}{C_2^{(1)^2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Psi^{(1)}=0,$$
$$\left(\Delta-\frac{1}{C_2^{(1)^2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\Phi^{(2)}=0,\quad \left(\Delta-\frac{1}{C_2^{(2)^2}}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{1}{r^2}\right)\Psi^{(2)}=0, \tag{1}$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ - оператор Лапласа; $C_1^{(i)}=[(\lambda_i+2\mu_i)/\rho_i]^{1/2}$, $C_2^{(i)}=(\mu_i/\rho_i)^{1/2}$ - скорость распространения продольных и поперечных волн в материалах волновода и покрытия; λ_i,μ_i - коэффициенты Ламе; ρ_i - плотность материалов.

Составляющие вектора перемещения $U=U(U_r,0,U_z)$ связаны с потенциалами $\Phi^{(i)}$ и $\Psi^{(i)}$ следующими соотношениями:

$$U_r^{(1)}=\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}+\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r\partial z},\quad U_z^{(1)}=\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial z^2}-\frac{1}{C_2^{(1)^2}}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial t^2},$$
$$U_r^{(2)}=\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial r}-\frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial z},\quad U_z^{(2)}=\frac{\partial\Phi^{(2)}}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\Psi^{(2)}\right). \tag{2}$$

Подставляя эти соотношения в формулы для напряжений

$$\sigma_{rr}^{(i)}=2\mu_i\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}+\lambda_i\left(\frac{u_r^{(i)}}{r}+\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial r}+\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial z}\right),\quad \sigma_{rz}^{(i)}=\mu_i\left(\frac{\partial u_r^{(i)}}{\partial z}+\frac{\partial u_z^{(i)}}{\partial r}\right), \tag{3}$$

получим выражения напряжений при помощи потенциалов $\Phi^{(i)}$, $\Psi^{(i)}$:

$$\sigma_{rr}^{(1)}=(\lambda_1+2\mu_1)\left(\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial r^2}+\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial r^2\partial z}\right)+\lambda_1\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r\partial z}+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial t^2}-\frac{1}{C_2^{(1)^2}}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial z\partial t^2}\right),$$
$$\sigma_{rz}^{(1)}=\mu_1\left(2\frac{\partial^2\Phi^{(1)}}{\partial z}+2\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial r\partial z^2}-\frac{1}{C_2^{(1)^2}}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial r\partial t^2}\right),$$
$$\sigma_{rr}^{(2)}=2\mu_2\left(\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial r^2}-\frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial r\partial z}\right)+\frac{\lambda_2}{C_1^{(2)^2}}\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial t^2}, \tag{4}$$
$$\sigma_{rz}^{(2)}=2\mu_2\left(\frac{\partial^2\Phi^{(2)}}{\partial r\partial z}-\frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial z^2}\right)+\rho_2\frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial t^2}.$$

Решение уравнений (1) и (2) ищем в следующем виде, который соответствует предположению о распространении продольной волны в направлении оси z с фазовой скоростью C

$$\Phi^{(1)}=AJ_0(\nu_1^{(1)}r)\cos k(z-ct), \qquad \Psi^{(1)}=BJ_0(\nu_2^{(1)}r)\sin k(z-ct),$$

$$\Phi^{(2)}=CK_0(\nu_1^{(2)}r)\cos k(z-ct), \quad \Psi^{(2)}=DK_1(\nu_2^{(2)}r)\sin k(z-ct), \qquad (5)$$

где J_0, K_0, K_1 - функции Бесселя от мнимого аргумента соответственно первого и второго рода,

$$K=\omega/c,\ \nu_i^{(j)}=(K^2-K_i^{(j)^2})^{1/2},\ K_i^{(j)}=\omega/C_i^{(j)} \quad (i,j=1,2),$$

ω- частота колебаний.

Длина волны ℓ связана с величинами K и C зависимостью

$$\ell=2\pi/k=2\pi C/\omega. \qquad (6)$$

Примем, что на цилиндрической поверхности r=R выполняются условия полного контакта

$$U_r^{(1)}=U_r^{(2)}(R,z), \qquad U_z^{(1)}(R,z)=U_z^{(2)}(R,z),$$

$$\sigma_{rr}^{(1)}(R,z)=\sigma_{rr}^{(2)}(R,z), \ \sigma_{rz}^{(1)}(R,z)=\sigma_{rz}^{(2)}(k,z). \qquad (7)$$

Подставляя в (2) и (4) выражения потенциалов $\Phi^{(i)}$ и $\Psi^{(i)}$ из (5) и используя рекуррентные формулы для функций Бесселя, получим следующую систему линейных однородных уравнений относительно постоянных A, B, C, D:

$$A\nu_1^{(1)}\cdot J_1(\nu_1^{(1)}R)+BkJ_1(\nu_2^{(1)}R)+C\nu_1^{(2)}K_1(\nu_1^{(2)}R)+D\cdot k\cdot K_1(\nu_2^{(2)}R)=0,$$

$$AkJ_0(\nu_1^{(1)}R)+B\nu_2^{(1)^2}\cdot J_0(\nu_2^{(1)}R)-C\cdot k\cdot K_0(\nu_1^{(2)}R)-D\nu_2^{(2)}K_0(\nu_2^{(2)}R)=0,$$

$$A[2\mu_1\left(-\frac{\nu_1^{(1)}}{R}J_1(\nu_1^{(1)}R)+\nu_1^{(1)^2}J_0(\nu_1^{(1)}R)\right)-\lambda_1K_1^{(1)^2}J_0(\nu_1^{(1)}R)]+$$

$$+B\cdot 2k\cdot\mu_1\left[-\frac{\nu_2^{(1)}}{R}J_1(\nu_2^{(1)}R)+\nu_2^{(1)^2}\cdot J_0(\nu_2^{(1)}R)\right]- \qquad (8)$$

$$-C\left[2\mu_2\left(\frac{\nu_1^{(2)}}{R}\cdot K_1(\nu_1^{(2)}R)+\nu_1^{(2)^2}K_0(\nu_1^{(2)}R)\right)-\lambda_2k_1^{(2)^2}K_0(\nu_1^{(2)}R)\right]-$$

$$-D\cdot 2k\mu_2\left[\frac{K_1(\nu_2^{(2)}R)}{R}+\nu_2^{(2)}K_0(\nu_2^{(2)}\cdot R)\right]=0,$$

$$A\cdot 2k\mu_1\nu_1^{(1)}\cdot J_1(\nu_1^{(1)}R)+B(2k^2-k_2^{(1)^2})\mu_1\nu_2^{(1)}J_1(\nu_2^{(1)}R)+$$

$$+C2k\mu_2\nu_1^{(2)}\cdot K_1(\nu_1^{(2)}R)+D(2k^2-k_2^{(2)^2})\mu_2K_1(\nu_2^{(1)}\cdot R)=0.$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы (8) следует

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}=0. \qquad (9)$$

где

$$a_{11}=\nu_1^{(1)}\cdot J_1(\nu_1^{(1)}R),\quad a_{12}=k\cdot\nu_2^{(1)}\cdot J_1(\nu_2^{(1)}R),\quad a_{13}=(\nu_1^{(2)}K_1(\nu_1^{(2)}R),$$

$$a_{14}=k\cdot K_1(\nu_2^{(1)}R),\quad a_{21}=kJ_0(\nu_1^{(1)}R),\qquad a_{22}=\nu_2^{(1)^2}\cdot J_0(\nu_2^{(1)}\cdot R),$$

$$a_{23}=-kK_0(\nu_1^{(2)}R),\quad a_{24}=-\nu_2^{(2)}\cdot K_0(\nu_2^{(2)}\cdot R),$$

$$a_{31}=2\mu_1\left[-\frac{\nu_1^{(1)}}{R}\cdot J_1(\nu_1^{(1)}R)+\nu_1^{(1)^2}\cdot J_0(\nu_1^{(1)}R)\right]-\lambda_1 k_1^{(1)^2}J_0(\nu_1^{(1)}R),$$

$$a_{32}=2k\mu_1\left[-\frac{\nu_2^{(1)}}{R}\cdot J_1(\nu_2^{(1)}R)+\nu_2^{(1)^2}\cdot J_0(\nu_2^{(1)}R)\right],$$

$$a_{33}=-2\mu_2\left[\frac{\nu_1^{(2)}}{R}\cdot K_1(\nu_1^{(2)}R)+\nu_1^{(2)^2}\cdot K_0(\nu_1^{(2)}R)\right]+\lambda_2 k_1^{(2)^2}K_0(\nu_1^{(2)}R),$$

$$a_{34}=-2k\mu_2\left[\frac{K_1(\nu_2^{(2)}R)}{R}+\nu_2^{(2)}\cdot K_0(\nu_2^{(2)}R)\right],$$

$$a_{41}=2k\mu_1\nu_1^{(1)}J_1(\nu_1^{(1)}R),\quad a_{42}=(2k_2-k_2^{(1)^2})\mu_1\nu_1^{(1)}J_1(\nu_2^{(1)}R),$$

$$a_{43}=2k\mu_2\nu_1^{(2)}K_1(\nu_1^{(2)}R),\quad a_{44}=(2k^2-k_2^{(2)^2})\mu_2K_1(\nu_2^{(2)}R).$$

Рассмотрим предельные случаи: 1. $\lambda_1\to 0$, $\mu_1\to 0$, 2. $\lambda_2\to 0$, $\mu_2\to 0$.

Для первого случая из уравнения (9) получим

$$4\sqrt{1-\alpha_2^{(2)^2}}\left[\frac{1}{\nu_2^{(2)}R}+\frac{K_0(\nu_2^{(2)}R)}{K_1(\nu_2^{(2)}R)}\right]-\frac{2(2-\alpha_2^{(2)^2})\sqrt{1-\alpha_2^{(2)^2}}}{\nu_2^{(2)}R}-$$
$$-\frac{(2-\alpha_2^{(2)^2})^2}{\sqrt{1-\alpha_1^{(2)^2}}}\frac{K_0(\nu_1^{(2)}R)}{K_1(\nu_1^{(2)}R)}=0, \tag{10}$$

$$\sqrt{1-\alpha_1^{(2)^2}}\sqrt{1-\alpha_2^{(2)^2}}\frac{J_1(\nu_1^{(1)}R)}{J_0(\nu_1^{(1)}R)}-\frac{J_1(\nu_2^{(1)}R)}{J_0(\nu_2^{(1)}R)}=0, \tag{11}$$

где $\alpha_i^{(j)}=C/C_i^{(j)}$ $(i,j=1,2)$.

Уравнение (10) соответствует задаче распространения продольных волн в упругой среде с цилиндрической полостью радиуса R, которая была рассмотрена в работе [3], а уравнение (11) - задаче распространения продольных волн в упругом цилиндре радиуса R, когда перемещения точек его поверхности ограничены. Учитывая асимптотические выражения для модифицированных функций Бесселя K_0 и K_1 при малых по сравнению с радиусом R длинах волн, уравнение (10) приводится к известному характеристическому уравнению поверхностных волн Рэлея:

$$4\sqrt{1-\alpha_1^2}\sqrt{1-\lambda_2^2}=(2-\alpha_2^2)^2. \tag{12}$$

Для второго предельного случая из уравнения (9) получим

$$\frac{k^2}{\nu_1^{(1)}\nu_2^{(1)}}-\frac{K_0(\nu_2^{(2)}R)}{K_1(\nu_2^{(2)}R)}=0, \tag{13}$$

$$(k_2^{(1)^2}-2k^2)\left[-\frac{\nu_1^{(1)^2}J_1(\nu_2^{(1)}R)}{J_0(\nu_2^{(1)}R)}-\frac{2\nu_1^{(1)}}{R}\frac{J_1(\nu_1^{(1)}R)\cdot J_1(\nu_2^{(1)}R)}{J_0(\nu_1^{(1)}R)J_0(\nu_2^{(1)}R)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\nu_2^{(1)^2}J_1(\nu_1^{(1)}R)}{J_0(\nu_1^{(1)}R)}\right]+4k^2\left[\frac{\nu_2^{(2)}J_1(\nu_1^{(1)}R}{J_0(\nu_1^{(1)}R)}-\frac{\nu_2^{(2)}}{R}\frac{J_1(\nu_1^{(1)}R)J_1(\nu_2^{(1)}R)}{J_0(\nu_1^{(1)}R)J_0(\nu_2^{(1)}R)}\right]=0. \tag{14}$$

Уравнение (13) соответствует задаче распространения продольных волн в упругой среде с цилиндрической полостью, когда перемещения точек на поверхности полости ограничены, а уравнение (14) - задаче распространения продольных волн в упругом цилиндре радиуса R. Можно показать, что из уравнения (14) для малых радиусов R по сравнению с длиной волны ℓ, используя разложение функции Бесселя J_0 и J_1 в ряд, при первом приближении значение фазовой скорости получается равным

$$C \simeq \left[\frac{\mu_1(3\lambda_1+2\mu_1)}{\rho_1(\lambda_1+\mu_1)}\right]^{1/2}=\left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2},$$

т.е значению скорости распространения продольных волн в упругой среде, а при втором приближении выявляется дисперсия волны. Если длина волны мала по сравнению с радиусом волновода, то уравнение (14) переходит в характеристическое уравнение для волн Рэлея [2]. Таким образом, при малых по сравнению с толщиной упругого покрытия радиусах составного цилиндрического волновода, используя полученные трансцендентные уравнения, а также учитывая появление в некоторых предельных случаях волн Релея, с достаточной точностью можно оценить влияние неоднородности составного волновода на скорость распространения продольных волн, что делает возможным применение полученных результатов в волоконно-оптических системах связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреховских Л.М.** Волны в слоистых средах. - М.: Изд-во АН СССР, 1957. - 502 с.
2. **Новацкий В.** Теория упругости. - М.: Мир, 1975. - 872 с.
3. **Biot M.A.** Propagation of Elastic Waves in Cylindrical Bare Containing a Fluid // Appl. Phys. - 1952. - № 23. - P. 997- 1005.
4. **Геворкян С.Х., Узуноглу Н.** Распространение крутильных волн в составном волноводе // Изв. НАН и ГИУ Армении. Сер. ТН.-1997.- Т. 50, № 2.- С.73-76.

ГИУА, Нац. Техн. ун-т Афины

02.05.1997