

А. М. АРАКЕЛЯН

К ПРИМЕНЕНИЮ МЕТОДА ИЗОБРАЖЕНИЙ  
 В РЕШЕНИИ МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ПРИ  
 КОНЕЧНЫХ МАГНИТНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЯХ СРЕДЫ\*

В решении задач с плоскопараллельными магнитостатическими полями одним из наиболее простых и эффективных методов является метод изображений. Он широко применяется в решении задач, в которых одна из двух областей среды имеет бесконечно большую магнитную проницаемость и границей между областями в поперечном сечении является комбинация аналитических кривых [1, 2, 3].

Однако применение этого метода в случае конечных магнитных проницаемостей среды в настоящее время ограничивается несколькими задачами, когда границей между двумя областями различных конечных магнитных проницаемостей является бесконечная плоскость или круговой цилиндр (задачи Сирла) [3]\*\*, а также когда границами между областями с различными конечными магнитными проницаемостями являются параллельные бесконечные плоскости [5, 6, 7]. Например, в задаче с бесконечно глубоким пазом, на рис. 1 приведены распределение и величины изображений

$$\alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1},$$

где  $\mu_1$  — магнитная проницаемость области, в которой расположен ток;

$\mu_2$  — магнитная проницаемость остальной области среды.

Аналогично последнему решению в [8] и [9] сделана попытка решить методом изображений задачу, в которой границей между двумя средами с конечными магнитными проницаемостями является двугранный угол, составляющий

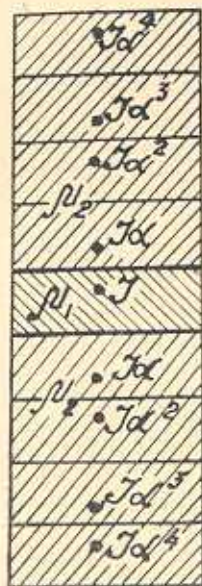


Рис. 1

\* Работа выполнена под руководством проф. Э. А. Мееровича.

\*\* В [4] также применен метод изображений совместно с другими математическими приемами для решения задачи с границей раздела в виде эллиптического цилиндра.

целую долю  $\pi$ . В цитированных работах величину каждого последующего изображения автор берет равной величине предыдущего, помноженной на коэффициент  $\alpha$ . На рис. 2 приведено соответствующее этому принципу распределение изображений применительно к углу в  $60^\circ$ . Подробное исследование вопроса, проведенное нами, показало, что такое применение метода изображений в задачах с конечными магнитными проницаемостями, когда границей является двугранный угол, не дает правильного решения. Покажем это на примере задачи с границей раздела между двумя областями конечных магнитных проницаемостей, имеющей форму двугранного угла, равного  $90^\circ$ .

Совместим стороны поперечного разреза этого угла с осями  $x$  и  $y$  (рис. 3). Возьмем произвольные коэффициенты при изображениях и

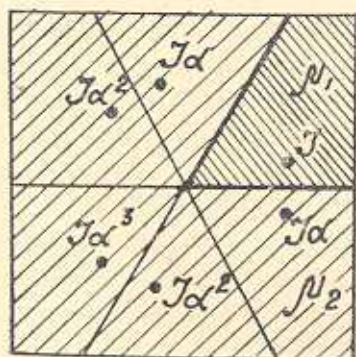


Рис. 2.

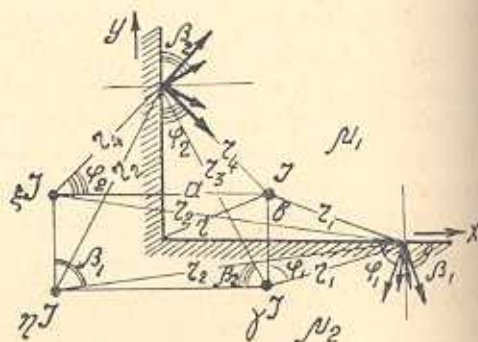


Рис. 3.

обозначим их буквами  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\tau$ . Задача заключается в нахождении таких значений этих коэффициентов, зависящих от  $\mu_1$  и  $\mu_2$ , которые удовлетворяли бы решению задачи.

Как известно, влияние наличия второй области с иной магнитной проницаемостью на распределение магнитного поля можно заменить влиянием фиктивных магнитных зарядов  $\sigma$ , определенным образом распределенных по границе раздела областей и, что магнитное поле в обеих областях получается наложением поля, обусловленного током, и поля, созданного магнитными зарядами  $\sigma$ .

В [10] приведена формула:

$$\sigma = \mu_1 H_n^{(1)} \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2}, \quad (1)$$

при помощи которой определяется плотность магнитных зарядов по значению нормальной составляющей напряженности магнитного поля в первой области ( $H_n^{(1)}$ ) в точках границы раздела.

При использовании метода изображений, влияние наличия второй среды на распределение магнитного поля заменяется влиянием токов изображений, расположенных симметрично действительному току по отношению к границам раздела областей.

Таким образом поле, созданное изображениями, должно в каждой точке первой среды, включая и границы, тождественно быть равно полю, созданному в тех же точках фиктивными магнитными зарядами

$$\bar{H}_z^{(1)} \equiv \bar{H}_{из}^{(1)} \quad (2)$$

или для их составляющих по любому направлению  $k$ :

$$H_{zk}^{(1)} \equiv H_{из.к}^{(1)}. \quad (3)$$

Выражение нормальной составляющей напряженности магнитного поля в первой области в точках границы раздела областей имеет вид: на грани угла, совмещенной с осью  $ox$

$$H_y^{(1)}(y=0) = -\frac{I}{2\pi} \left[ (1+\gamma) \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + (\gamma+\xi) \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} \right]; \quad (4)$$

на грани угла, совмещенной с осью  $oy$

$$H_x^{(1)}(x=0) = \frac{I}{2\pi} \left[ (1+\xi) \frac{y-b}{a^2+(y-b)^2} + (\gamma+\eta) \frac{y+b}{a^2+(y+b)^2} \right]. \quad (5)$$

Подставляя эти значения напряженности магнитного поля в формулу (1), получим соответственно величины „магнитных зарядов“, распределенных по грани угла  $ox$  и по грани угла  $oy$ . Имея распределение „магнитных зарядов“ на границе раздела областей, можем определить в любой из областей магнитное поле, обусловленное только этими „зарядами“. В частности, на грани угла  $ox$  в первой области нормальная составляющая напряженности магнитного поля обусловленного только „магнитными зарядами“ выразится формулой:

$$H_{zy}^{(1)}(y=0) = \frac{\sigma_{ox}}{2\mu_1} - \int_0^{\infty} \frac{\sigma_{oy}}{2\pi\mu_1} \cdot \frac{ydy}{x^2+y^2}. \quad (6)$$

Согласно формуле (3), это значение должно тождественно равняться нормальной составляющей напряженности магнитного поля, обусловленного изображениями, в первой области на грани  $ox$ , которая выражается формулой:

$$H_{из,y}^{(1)}(y=0) = -\frac{I}{2\pi} \left[ \gamma \frac{x-a}{(x-a)^2+b^2} + (\gamma+\xi) \frac{x+a}{(x+a)^2+b^2} \right]; \quad (7)$$

т. е. на грани  $ox$  должно иметь место тождество:

$$H_{zy}^{(1)}(y=0) \equiv H_{из,y}^{(1)}(y=0). \quad (8)$$

Тождество (8), при произвольных  $a$  и  $b$  и изменении значения  $x$  от нуля до бесконечности, удовлетворяется лишь в том случае, когда коэффициенты при изображениях будут равны:

$$\xi = \frac{\mu_2 - 3\mu_1}{\mu_2 + 3\mu_1}.$$

$$\eta = \frac{\mu_2^2 + 3\mu_1^2}{(\mu_2 + \mu_1)(\mu_2 + 3\mu_1)}, \quad (9)$$

$$\gamma = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}.$$

На грани  $ou$  должно иметь место также тождественное равенство между нормальными составляющими напряженности магнитных полей, обусловленных изображениями и „магнитными зарядами“. Но такое тождественное равенство, при произвольных  $a$  и  $b$  и изменении значения  $y$  от нуля до бесконечности, возможно лишь в том случае, когда значение коэффициента  $\eta$  будет таким же, что и в выражении (9), а значения коэффициентов  $\xi$  и  $\gamma$  поменяются местами.

Поскольку для всех точек первой области, включая и границы, эти коэффициенты должны быть одни и те же, то необходимо иметь равенство:

$$\frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} = \frac{\mu_2 - 3\mu_1}{\mu_2 + 3\mu_1}. \quad (10)$$

Но равенство (10) невозможно ни при каких конечных значениях  $\mu_1$  и  $\mu_2$ . Оно возможно только при  $\mu_1 \rightarrow \infty$ ,  $\mu_2 \propto c$  или  $\mu_2 \rightarrow \infty$ ,  $\mu_1 = c$ , где  $c$  произвольная, но конечная величина. Отсюда заключаем, что никакая комбинация коэффициентов при изображениях не может дать решения рассматриваемой задачи, когда магнитные проницаемости обеих областей конечны, если эти изображения расположить на однолистной римановой поверхности.

Из обобщенного метода изображений, рассмотренного Э. А. Меревичем [1, 2] вытекает, что в общем случае изображения располагаются на многолистной римановой поверхности. Для задач с границей раздела областей в виде произвольного двугранного угла в [11] показана связь количества римановых поверхностей и числа размещенных на ней изображений с величиной угла, в котором расположен ток, при бесконечно большой величине магнитной проницаемости одной из областей. Можно предположить, что при конечных магнитных проницаемостях, количество римановых поверхностей и число размещенных на ней изображений должны зависеть не только от величины угла, являющегося границей раздела областей, но и от величин магнитных проницаемостей этих областей.

Ниже приводим полученное нами решение методом изображений конкретной задачи с конечными магнитными проницаемостями областей, границей раздела которых является двугранный угол  $\theta = 90^\circ$ . Коэффициент  $\alpha$  принят в этой задаче равным:

$$\alpha = 2 \cos \frac{3}{8} \pi = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1}. \quad (11)$$

При этих значениях  $\theta$  и  $\alpha$  задача решается с помощью изображений,

расположенных на четырехлистной римановой поверхности. Количество изображений равно шестнадцати.

Для удобства обозрения эта четырехлистная поверхность преобразована в однолистную и приведена на рис. 4. Римскими цифрами обозначены номера листов римановой поверхности. На рис. 4а приведены изображения, обуславливающие магнитное поле в первой области (двойная штриховка); на рис. 4б приведены изображения, обуславливающие магнитное поле во второй области (двойная штриховка). Значения коэффициентов при этих изображениях следующие:

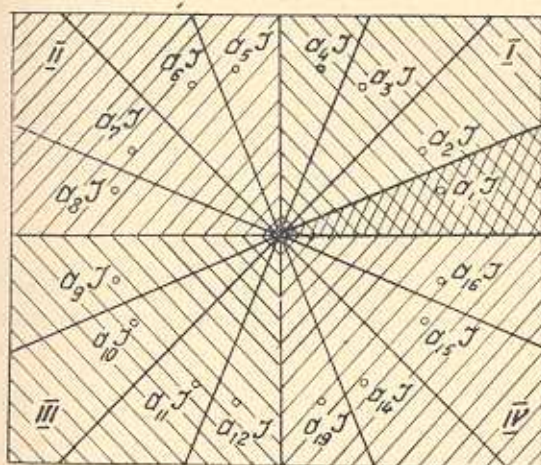


Рис. 4а.

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 1 & b_3 &= 0 \\
 a_2 &= a_{16} = a & b_4 &= b_2 = 0 \\
 a_3 &= a_{15} = a^2 & b_5 &= b_1 = (1-a) \\
 a_4 &= a_{14} = a^3 & b_6 &= b_{10} = a(1-a) \\
 a_5 &= a_{13} = \frac{a^4}{2} + a^2 & b_7 &= b_{13} = a^2(1-a) \\
 a_6 &= a_{12} = 2a^3 & b_8 &= b_{14} = -a^3(1-a)\sqrt{2} \\
 a_7 &= a = a^2(1+a) & b_9 &= b_{13} = \frac{a^4}{2}(1-a) \\
 a_8 &= a_{10} = a^5 + \frac{a^3}{2} & b_{10} &= b_{12} = a^3(1-a) \\
 a_9 &= \frac{3}{2} a^4 & b_{11} &= 2a^2(1-a).
 \end{aligned} \tag{12}$$

Из рис. 4а и 4б очевидно, что в первой и во второй областях условия задачи выполняются. Нетрудно также показать, что полученное решение удовлетворяет и граничным условиям задачи. Таким образом

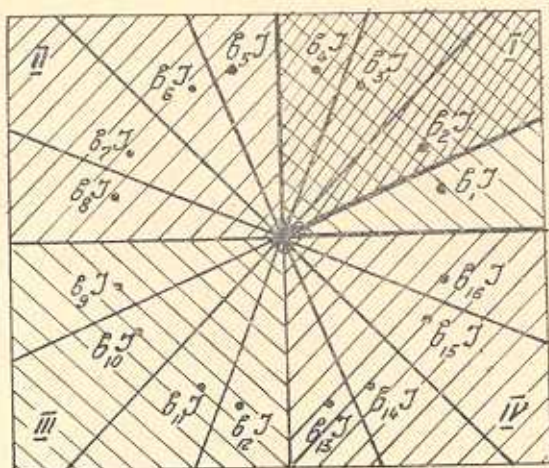


Рис. 46.

приведенное решение при помощи изображений удовлетворяет всем условиям задачи и дает возможность определить напряженность магнитного поля как в первой, так и во второй областях.

ЭНИН АН СССР  
Институт электротехники  
АН Армянской ССР

Поступило 2 VII 1959

#### Ա. Մ. ԱՌԱՔԵԼՅԱՆ

ՎԵՐՋԱՎՈՐ ՄԱԳՆԻՏԱԿԱՆ ԹԱՓԱՆՅԵԼԻՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ  
ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ՄԱԳՆԻՏՈՍԱՏԻԿ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ԼՈՒԹՄԱՆ ՀԱՄԱՐ  
ԱՐՏԱՊԱՏԿԵՐՄԱՆ ՄԵԹՈՂԻ ԿԻՐԱՌՄԱՆ ՀԱՐՅԻ ՄԱՍԻՆ

#### Ա մ փ ո փ ու մ

Հարթ-գուգանեռ մագնիսատառիկ դաշտ պարունակող խնդիրների լուծման ամենաէֆեկտիվ մեթոդներից է արտապատկերման մեթոդը (метод изображений): Այդ մեթոդը լայնորեն կիրառվում է այն դեպքերում, երբ գծալին էլեկտրական հոսանքը դանդաղ է անհամասեռ միջավայրում, որի որոշ մասի մագնիսական թափանցելիության արժեքը կարելի է ընդունել անսահման մեծ: Սակայն միջավայրի բոլոր մասերի վերջավոր մագնիսական թափանցելիությունների դեպքում այդ մեթոդի կիրառումը ներկայումս սահմանափակվում է ընդամենը մի քանի խնդիրներով:

Գրականության մեջ փորձեր կան այդ մեթոդը կիրառելու վերջավոր մագնիսական թափանցելիությունների ունեցող երկու մասերից բազմադաս միջավայր պարունակող խնդիրների դեպքում, երբ այդ մասերը բաժանող երկնիստ անկյունը կազմում է  $\pi$ -ի ամբողջ մասը: Ընդ որում արտապատկերները բազմապատկվում են որոշակի զործակիցներով և անզարգվում Ռիմանի միաթերթ մակերեսի վրա:

Հողվածում կոնկրետ օբյեկտներով ցույց է տրվում, որ վերջավոր մագնիսական թափանցելիութունների դեպքում այդ դործակիցների ոչ մի բնարություն ճնարարություն չի տալիս ստանալ խնդրի լուծումը Ռիմանի միաթերթի մակերեսի վրա:

Արտապատկերների օգնութեամբ տրված է այդ ախտի խնդրի կոնկրետ լուծումը Ռիմանի բազմաթերթի մակերեսի վրա: Ընդորում նշված թերթերի թիվը և նրանց վրա դանձող արտապատկերների քանակը կախված է վերահիշյալ մասերի մագնիսական թափանցելիութունների արժեքներից և այդ մասերը բաժանող երկնիստ անկյան մեծութունից:

## ЛИТЕРАТУРА

1. Меерович Э. А. „Применение метода изображений для электростатических и магнитоэстатических задач“. Известия ЭНИН АН СССР, т. 4, вып. 1, 1936.
2. Меерович Э. А. The Method of Images for calculating Electric and Magnetic Fields, P. M, J. S. vol. 25, № 166, 1938.
3. Хэз Б. „Электромагнитные расчеты“. ОНТИ НКТП, Энергоиздат, 1934.
4. Джалалидзе В. П. „Определение некоторых электростатических полей и магнитных полей линейных токов, расположенных вблизи сердечников из магнитных материалов (Диссертация)“, Тбилиси, 1954.
5. Олендорф Ф. „Токи в земле“. Гос. НТИ, 1932.
6. Бурман В. О. „Теория электромагнитных полей применяемых в электроразведке ГТИ“, 1933.
7. Аронзон Г. С. „Расчет электромагнитных полей при наличии железа“. (Диссертация), 1944 г., Москва.
8. Брон О. Б. „Движение электрической дуги в магнитном поле“. Госэнергоиздат, 1944.
9. Брон О. Б. „Электрическая дуга в аппаратах управления“, Госэнергоиздат, 1954.
10. Аракелян А. М. „Определение магнитного поля в неоднородной среде при помощи магнитных зарядов“, расположенных на границе сред“. Труды VI конференции молодых научных работников, ЭНИН АН СССР.
11. Аракелян А. М. „Электродинамические силы, действующие на проводник с током, расположенный вблизи угла ферромагнитного тела“, журн. „Электричество“ № 2, 1959.