ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXIX, № 6, 1976 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Ю. Л. САРКИСЯН

К ТЕОРИИ СИНТЕЗА ПЛОСКИХ ШАРНИРНЫХ МЕХАНИЗМОВ МЕТОДОМ КВАДРАТИЧЕСКОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИИ

В работе [2] впервые поставлена и решена задача об определении точек плоской фигуры, которые в произвольном числе заданных положений располагаются вблизи от дуги окружности, причем близость понимается в смысле наименьших квадратов. Изучены свойства геометрического места указанных точек с указанием их максимального числа.

В настоящей статье представлено новое решение этой задачи, основанное на использовании специальных коэффициентов, которые по установившейся традиции в литературе по синтезу механизмов называются множителями Лагранжа [1]. Основная цель работы—установление взаимосвязи между существующей теорией алгебраического синтеза механизмов и основными результатами обобщенной кинематической геометрии, развиваемой в [2].

Плоская фигура e занимает N конечно удаленных положений на неподвижной плоскости E. Эти положения заданы значениями величин X_{0i}, Y_{0i}, θ_i ($i=1, 2, 3, \ldots, N$), определяющих координатную систему xoy, неразрывно связанную с e, относительно системы XOY, неразрывно связанной с E (рис. 1). Требуется найти такую пару точек $B \in e$ и $A \in E$, расстояние которых в заданных N положениях плоскости e по возможности мало отличается от постоянной R. Положения B_i ($i=1, 2, 3, \ldots, N$) искомой точки B, очевидно, должны лежать вблизи от окружности радиуса R с центром в точке A.

Подлежащие определению параметры x_B, y_B, X_A, Y_B, R должны минимизировать по модулю отклонения $\Delta_i = |\overline{AB_i}| - R$ ($i=1, 2, \ldots, N$).

Задачу минимизации отклонений Δ_i можно свести к эквивалентной задаче минимизации значений Δ_{qi} взвешенной разности

$$\Delta_{qi} = (AB_i)^2 - R^2 = (\overline{r}_{B_i} - \overline{r}_A)^2 - R^2 = \Delta_i(R + |\overline{AB_i}|), \tag{1}$$

поскольку переменный коэффициент $R + |\overline{AB_i}|$ при хорошем приближении достаточно близок к постоянной $2R$.

С учетом известных формул преобразования координат

$$X_{B_i}=X_{O_i}+x_B\cos\theta_i-y_B\sin\theta_i,$$

$$Y_{B_i}=Y_{O_i}+x_B\sin\theta_i+y_B\cos\theta_i$$

выражение (1) можно преобразовать к следующему многочлену:

$$\Delta_{q_i}=-2(f_{0i}X_A+f_{1i}Y_A+f_{2i}H+f_{3i}x_B+f_{4i}y_B+f_{5i}P_5+f_{6i}P_6-F_i), \quad (2)$$

где

$$f_{0i}=X_{O_i};\ f_{1i}=Y_{O_i};\ f_{2i}=1;\ f_{3i}=-(X_{O_i}\cos\theta_i+Y_{O_i}\sin\theta_i);$$

$$f_{4i}=X_{O_i}\sin\theta_i-Y_{O_i}\cos\theta_i;\ f_{5i}=\cos\theta_i;\ f_{6i}=\sin\theta_i;$$

$$F_i=\frac{1}{2}(X^2_{O_i}+Y^2_{O_i});\qquad H=\frac{1}{2}(R^2-x^2_B-y^2_B-X^2_A-Y^2_A),$$

причем

$$P_5=x_BX_A+y_BY_A,$$

$$P_6=x_BY_A-y_BX_A. \quad (3)$$

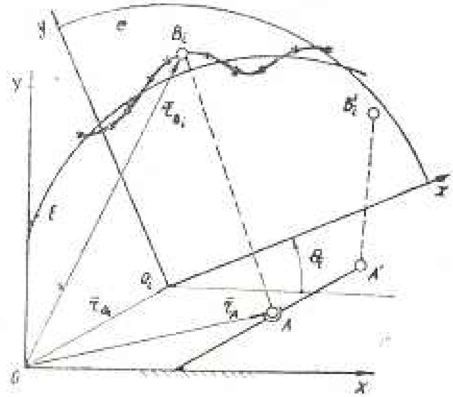

Рис. 1

Так как величины Δ_i необходимо минимизировать по модулю то для решения этой задачи целесообразно обратиться к методу наименьших квадратов, составив с этой целью квадратическую сумму значений Δ_{q_i}, подлежащих минимизации:

$$S=\sum_{i=1}^{N}\Delta^2_{q_i}. \quad (4)$$

Рассмотрим необходимые условия минимума суммы (4):

$$\frac{\partial S}{\partial j}=0 \quad (j=X_A, Y_A, H, x_B, y_B). \quad (5)$$

Условия (5) после преобразований с учетом (2) и (4) приводятся к следующей нелинейной системе:

$$C_{00}X_A+C_{01}Y_A+C_{02}H+C_{03}X_B+C_{04}y_B+C_{05}P_5+C_{06}P_6-\lambda_1x_B-\lambda_0y_B=\gamma_0,$$

$$C_{10}X_A + C_{11}Y_A + C_{12}H + C_{13}x_B + C_{14}y_B + C_{15}P_5 + C_{16}P_6 + \lambda_0 x_B + \lambda_1 y_B = \gamma_1,$$
$$C_{20}X_A + C_{21}Y_A + C_{22}H + C_{23}x_B + C_{24}y_B + C_{25}P_5 + C_{26}P_6 = \gamma_2, \tag{6}$$
$$C_{30}X_A + C_{31}Y_A + C_{32}H + C_{33}x_B + C_{34}y_B + C_{35}P_5 + C_{36}P_6 - \lambda_1 X_A + \lambda_0 Y_A = \gamma_3,$$
$$C_{40}X_A + C_{41}Y_A + C_{42}H + C_{43}x_B + C_{44}y_B + C_{45}P_5 + C_{46}P_6 + \lambda_0 X_A + \lambda_1 Y_A = \gamma_4,$$

где через λ_0 и λ_1 обозначены выражения:

$$\lambda_0 = C_{50}X_A + C_{51}Y_A + C_{52}H + C_{53}x_B + C_{54}y_B + C_{55}P_5 + C_{56}P_6 - \gamma_5;$$
$$\lambda_1 = C_{60}X_A + C_{61}Y_A + C_{62}H + C_{63}x_B + C_{64}y_B + C_{65}P_5 + C_{66}P_6 - \gamma_6, \tag{7}$$

а коэффициенты C_{kl} и γ_k определяются по формулам:

$$C_{kl} = \sum_{i=1}^{N} f_{ki}\, f_{li}; \qquad \gamma_k = \sum_{i=1}^{N} F_i\, f_{ki}.$$
$$(k=0,\ 1,\ 2, \cdots, 6;\ \ l=0,\ 1,\ 2, \cdots, 6).$$

Из уравнений (6) и (7) можно составить следующую систему:

$$\begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03}-\lambda_1 & C_{04}+\lambda_0 & C_{05} & C_{06} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13}+\lambda_0 & C_{14}+\lambda_1 & C_{15} & C_{16} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{30}-\lambda_1 & C_{31}+\lambda_0 & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{40}+\lambda_0 & C_{41}+\lambda_1 & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{50} & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{60} & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ H \\ x_B \\ y_B \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \\ \gamma_5+\lambda_0 \\ \gamma_6+\lambda_1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Теперь, решая по правилу Крамера систему (8), параметры X_A, Y_A, H, x_B, y_B, P_5 и P_6 можно выразить как функции от λ_0 и λ_1:

$$\{X_A,\ Y_A,\ H,\ x_B,\ y_B,\ P_5,\ P_6\} = \frac{1}{D}\,\{D_{X_A},\ D_{Y_A},\ D_H,\ D_{x_B},\ D_{y_B},\ D_{P_5}, D_{P_6}\}. \tag{9}$$

Подставляя (9) в уравнения (3), получаем две билинейные формы от входящих в (9) определителей:

$$F_1(\lambda_0,\ \lambda_1) = D_{x_B}D_{X_A} + D_{y_B}D_{Y_A} - DD_{P_5} = 0,$$
$$F_2(\lambda_0,\ \lambda_1) = D_{x_B}D_{Y_A} - D_{y_B}D_{X_A} - DD_{P_6} = 0. \tag{10}$$

Условимся рассматривать числа λ_0 и λ_1 как координаты некоторой точки в некоторой системе прямоугольных координат $\lambda_0 O \lambda_1$. Это позволяет нам сопоставить любой паре чисел λ_0 и λ_1 определенную точку координатной плоскости $\lambda_0 O \lambda_1$, которую обозначим Ω. Уравнения (10) задают на плоскости Ω алгебраические кривые F_1 и F_2. Решая для общих точек F_1 и F_2 систему (8), находим стационарные точки функций (4). Из них для нас представляют интерес точки минимума, которые должны быть выделены после изучения частных производных второго порядка.

Каждой из точек минимума $P^*(X_A, Y_A, H, x_B, y_B)$, которой соответствует достаточно малое значение суммы S, следовательно и Δ_{q_i}, можно сопоставить некоторый рычаг с центром в $A(X_A, Y_A)$ и длиной $R=\sqrt{X_A^2+Y_A^2+2H}$, шарнирно соединенный с плоскостью e в точке $B(x_B, y_B)$. Присоединив к плоскости e два таких рычага, получим одноподвижный четырехшарнирник, шатунная плоскость которого проходит достаточно близко от заданных положений плоскости e.

Перейдем теперь к изучению свойств кривых F_1 и F_2 с целью установления максимального числа их вещественных общих точек.

С помощью теоремы Лапласа старшие члены в разложении определителя D могут быть представлены в следующем виде:

$$(\lambda_0^2+\lambda_1^2)^2\begin{vmatrix} C_{22} & C_{25} & C_{26} \\ C_{52} & C_{55} & C_{56} \\ C_{62} & C_{65} & C_{66} \end{vmatrix}.$$

Кроме того, можно заметить, что члены третьего порядка этого многочлена содержат общий множитель $(\lambda_0^2+\lambda_1^2)$. Это означает, что уравнение $D=0$ определяет бициркулярную кривую четвертого порядка. Аналогично, анализируя остальные определители, можно показать, что d_{X_A}, d_{Y_A}, d_{x_B}, d_{y_B}—циркулярные кривые четвертого порядка (квартики), а d_{P_5} и d_{P_6}—бициркулярные кривые пятого порядка (квинтики).

С учетом результатов проведенного анализа старшие члены в уравнениях (10) записываются в следующем виде:

$$(\lambda_0^2+\lambda_1^2)^4P_1^1(\lambda_0, \lambda_1)+(\lambda_0^2+\lambda_1^2)^2\,P_1^4(\lambda_0, \lambda_1)+(\lambda_0^2+\lambda_1^2)P_1^5(\lambda_0, \lambda_1)+\cdots$$

$$(\lambda_0^2+\lambda_1^2)^4P_2^1(\lambda_0, \lambda_1)+(\lambda_0^2+\lambda_1^2)P_2^4(\lambda_0, \lambda_1)+(\lambda_0^2+\lambda_1^2)P_2^5(\lambda_0, \lambda_1)+\cdots$$

где $P_1^1(\lambda_0, \lambda)$ и $P_2^1(\lambda_0, \lambda_1)$—первого, $P_1^4(\lambda_0, \lambda_1)$ и $P_2^4(\lambda_0, \lambda_1)$—четвертого, а $P_1^5(\lambda_0, \lambda_1)$ и $P_2^5(\lambda_0, \lambda_1)$—пятого порядка однородные многочлены от λ_0, λ_1. Можно показать, что кривые девятого порядка F_1 и F_2, определяемые уравнениям (10), несмотря на наличие множителя $(\lambda_0^2+\lambda_1^2)^4$ в выражении членов девятого порядка, проходят через циклические точки всего трижды, к тому же доказывается, что F_1 и F_2 имеют общие касательные в циклических точках.

Из однородной формы уравнений (10) следует, что все точки (λ_0, λ_1), для которых D_{X_A}, D_{Y_A}, D_{x_B}, D_{y_B}, D_{P_5}, D_{P_6}, D одновременно равны нулю, будут общими двойными точками для кривых F_1 и F_2. Попробуем установить максимальное число подобных точек. Они должны быть определены из условия равенства шести ранга расширенной матрицы системы (8). Для этого необходимо и достаточно, чтобы любые два минора седьмого порядка в расширенной матрице обратились в нуль и в то же время не все общие для них миноры шестого порядка стали нулем. Возьмем, например, определители D и $D_{X_Д}$. Соответствующие им кривые d и $d_{X_Д}$ имеют 16 общих точек, из которых четыре совпадают с циклическими, а еще четыре обращают в нуль все миноры шестого порядка, общие для D и $D_{X_Д}$. В итоге число точек, для которых ранг расширенной матрицы—шесть, равно $16-4-4=8$. К тому же результату можно прийти, если рассмотреть пересечение любых двух из вышеуказанных кривых. Таким образом, из 81 общей точки кривых F_1 и F_2 32 совпадают с указанными восьмью точками.

Исключая из множества 81 общей точки F_1 и F_2 вышеуказанные 32 точки, а еще 24 точки, совпадающие с циклическими, получим, что максимальное число вещественных общих точек кривых F_1 и F_2, для которых система (8) имеет единственное решение (ранг расширенной матрицы равен семи), равно 25. Данный вывод полностью подтверждается результатами работы [2].

Когда $N=4$, коэффициенты—определители при членах нулевого, первого и второго порядка в уравнениях (10), —обращаются в нуль тождественно, и, следовательно, начало системы координат $\lambda_0 O \lambda_1$ является общей тройной точкой для кривых F_1 и F_2. При $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$ все определители в (9) равны нулю, и, поэтому, условия (3) нельзя привести к уравнениям (10). В данном случае задача решается следующим образом. Ранг расширенной матрицы системы (8) при $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$, $N=4$ равен четырем, и, поэтому, X_A, Y_A, P_5 и P_6 могут быть представлены через H, x_B и y_B по любым четырем уравнениям этой системы. Таким образом, имеем:

$$\begin{bmatrix} X_A \\ Y_A \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = [K_j] \cdot \begin{bmatrix} H \\ x_B \\ y_B \\ 1 \end{bmatrix},$$

где $[K_j]$—квадратная матрица четвертого порядка, элементы которой —определители четвертого порядка, составленные из коэффициентов C_{kl} и γ_k.

Подставляя эти соотношения в любое из равенств (3) и исключая H, получим кубическое уравнение относительно x_B и y_B. Легко убедиться, что оно есть уравнение кривой круговых точек плоскости e. В самом деле, для каждой круговой точки имеют место равенства $\Delta_{qi}=0$ $(i=1, 2, 3, 4)$, которые после преобразований дают нам условия $\lambda_0=0$ и $\lambda_1=0$. Итак, при $N=4$ всей кривой круговых точек, фиксированной в плоскости e, соответствует единственная точка O плоскости Ω.

Если же $N=5$, в уравнениях (10) члены нулевого и первого порядка обращаются в нуль, а кривые F_1 и F_2 дважды проходят через начало системы $\lambda_0 O \lambda_1$. При значениях $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$ ранг расширенной матрицы системы (8) становится равным пяти. В данном случае с помощью любых пяти уравнений системы (8) неизвестные X_A, Y_A, H, P_5 и P_6 можно выразить в виде линейных функций от x_B и y_B. После подстановки этих функций в равенства (3) получаем два кубических уравнения относительно x_B и y_B. На пересечении соответствующих кубических кривых лежат точки Бурместера. Этот вывод следует из того факта, что систему (9) при $N=5$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$ можно преобразовать в систему уравнений $\Delta_{q_i}=0$ $(i=1, 2, 3, 4, 5)$. Таким образом, при $N=5$ точкам Бурместера плоскости e в плоскости Ω соответствует начало O системы $\lambda_0 O \lambda_1$.

При $N=6$ в уравнениях (10) отсутствуют свободные члены и кривые F_1, F_2 опять проходят через начало O системы $\lambda_0 O \lambda_1$.

Ранг системы (8) при $N=6$, $\lambda_0=0$, $\lambda_1=0$ возрастает до шести. Если выразить неизвестные X_A, Y_A H, x_B, P_5, P_6 через y_B по любым шести уравнениям системы (9) и далее ввести эти линейные функции в уравнения (3), получим систему двух уравнений с одним неизвестным, которая в общем случае несовместна. При $N>6$ кривые F_1 и F_2 вовсе не проходят через точку O.

Рассмотрим теперь тот частный случай задачи, когда начало подвижной системы xoy движется по дуге окружности, т. е. $X^2_{o_i}+Y^2_{o_i}=R^2_{o_i}=\text{const}$. Теперь легко видеть, что столбец свободных членов системы (9) получается умножением элементов третьего столбца матрицы коэффициентов на постоянную величину R^2_o. В связи с этим свободные члены в уравнениях (8), так же, как и в выражениях определителей D_{X_A}, D_{Y_A}, D_H, D_{x_B}, D_{y_B}, D_{P_5}, D_{P_6}, обращаются в нуль. Так как при $\lambda_0=0$ и $\lambda_1=0$ $D\neq 0$, то из формул (9) находим, что $X_A=0$, $Y_A=0$, $x_B=0$, $y_B=0$, $P_5=0$, $P_6=0$ и $H=0$. Это означает, что начало подвижной системы координат является круговой точкой, а начало XOY—центром окружности (тривиальный результат).

Разобранный выше случай очень часто встречается при решении задач синтеза механизмов, в частности, при синтезе передаточного четырехзвенника.

ЕрПИ им. К. Маркса

ՅՈՒ. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՀԱՐԹ ԼԾԱԿԱՅԻՆ ՄԵԽԱՆԻԶՄՆԵՐԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՅԻՆ ՄՈՏԱՐԿՄԱՆ ՄԵԹՈԴՈՎ ՍԻՆԹԵԶԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ամփոփում

Հոդվածում ներկայացված է հարթ պատկերի ամենափոքր քառակուսիների իմաստով շրջանագծին մոտեցող կետերի որոշման խնդրի նոր լուծում: Փոխա-

դարձ կապ է հաստատված լծակային մեխանիզմների հանրահաշվական սինթեզի հայտնի տեսության և հեղինակի նախկին աշխատանքներում զարգացվող ընդհանրացված կինեմատիկական երկրաչափության միջև։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Артоболевский И. И., Левитский Н. И., Черкудинов С. А.* Синтез плоских механизмов. Физматгиз, М., 1958.

2. *Саркисян Ю. Л., Гупта К., Росс Б.* Кинематическая геометрия в связи с квадратическим приближением заданного движения. «Конструирование и технология машиностроения», № 2, 1973, изд-во «Мир».