А. К. АНАНЯН

РАСЧЕТ ПРОДОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ РУСЛА РЕКИ ПРИ НЕПРЕРЫВНОМ ИЗМЕНЕНИИ ЕЕ БАЗИСА ЭРОЗИИ

В настоящее время на притоках озера Севан проектируются мосты и гидротехнические сооружения, расчетные параметры и в частности отметки заложения фундаментов которых следует устанавливать с учетом дальнейшего спуска базиса эрозии рек, в связи со спуском уровня озера.

В этой заметке даны формулы для расчета продольного профиля русла реки для любого момента времени при заданном законе понижения ее базиса эрозии, гранулометрическом составе грунтов, из которых сложено русло, русло, формирующем расходе, плане расположения реки и ее начального продольного профиля.

Поставленная задача решается на основе совместного применения уравнений:

деформации русла

$$\frac{\partial G}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial t}=0, \tag{1}$$

неравномерного движения жидкости

$$\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial x}=-\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2g}\right)-\frac{u^2}{C^2h}, \tag{2}$$

транспортирующей способности потока

$$G=s_{\text{ср}}\cdot q=q\cdot\varphi\left(\frac{h}{d},\ A\,(d)\frac{i\sqrt{ghi}}{\sigma\varkappa w}\right), \tag{3}$$

где G — твердый расход, транспортируемый турбелентным потоком; $s_{\text{ср}}$ — средняя мутность потока по сечению; q — расход на единицу ширины реки; z — отметка дна русла реки (рис. 1); h — глубина воды

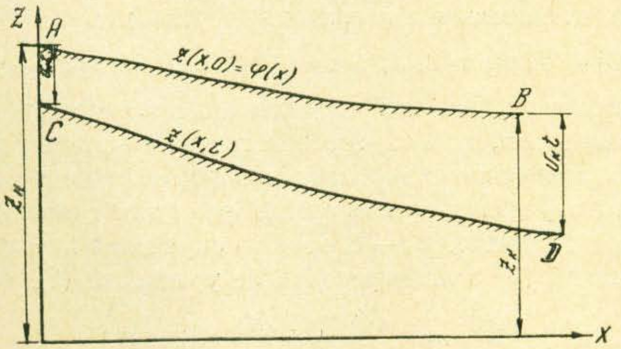

Рис. 1.

в реке, u — средняя скорость по сечению реки; C – коэффициент Шези; σ, d, w — соответственно относительная плотность, диаметр и гидравлическая крупность твердых частиц; $i = \frac{\partial z}{\partial x}$ уклон дна реки в данном створе; $\varkappa$ — постоянная Кармана; $A\,(d)$ параметр, который зависит от d.

Будем считать, что в каждом створе в каждый момент времени проходит тот твердый расход, который соответствует транспортирующей способности потока в этом створе и в этот момент времени.

Произведенные институтом натурные и модельные исследования показали, что боковая эрозия рек по сравнению с донной эрозией мала и ею можно пренебречь. Это положение дает возможность решить задачу в первом приближении, рассматривая ее как плоскую.

Для расчета транспортирующей способности потока в основу принимаем формулу М. Великанова.

$$G = qs_{\text{ср}} = q\frac{A\,(d)\,i\sqrt{ghi}}{\sigma\varkappa w}\,. \tag{4}$$

После совместного решения уравнений (1)—(3) для $z\,(x,\ t)$ получаем следующее уравнение

$$\frac{\partial^2 z}{\partial z^2} + p\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial i} + D = 0, \tag{5}$$

где

$$p = i\left[3h\left(1 - \frac{\alpha q^2}{gh^3}\right)\right]^{-1};\ D = pi; \tag{6}$$

$$b = -2\sigma w\varkappa\,[3qA\,(d)\sqrt{ghi}]^{-1}. \tag{7}$$

Линеаризуем уравнение (5) путем осреднения p и b для небольшого интервала изменения i и h. Решение линеаризированного уравнения (5) можно представить в следующем виде:

$$z\,(x,\ t) = \frac{x}{L}(z_{\text{к}} - v_{\text{к}}t) + \frac{L - x}{L}(z_{\text{н}} - v_{\text{н}}t) + \Phi\,(x, t). \tag{9}$$

При следующих начальных и граничных условиях

$$z\,(x,\ 0) = \varphi\,(x);\ z\,(0,\ t) = z_{\text{н}} - v_{\text{н}}t;\ z\,(L,\ t) = z_{\text{к}} - v_{\text{к}}t, \tag{10}$$

где $\varphi\,(x)$ — заданная функция продольного профиля русла в начальный момент времени, $z_{\text{н}}$ и $z_{\text{к}}$ соответственно высотные расположения начального и конечного створов реки в момент времени $t = 0$ (рис. 1), $v_{\text{к}}$ — скорость опускания базиса эрозии реки или скорость понижения горизонта воды в озере, $v_{\text{н}}$ — скорость опускания начального створа реки. Подставляя (9) в линеаризованное уравнение (5), получим:

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + p\frac{\partial\Phi}{\partial x} + b\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \lambda = 0, \tag{11}$$

где

$$\lambda = \frac{p}{L}(z_{\text{к}} - v_{\text{к}}t) - \frac{p}{L}(z_{\text{н}} - v_{\text{н}}t) - \frac{bv_{\text{к}}}{L}x - \frac{bv_{\text{н}}(L - x)}{L} + D. \tag{12}$$

Сделаем следующую подстановку

$$\Phi(x,\ t) = \psi(x,\ t)\exp\left(\frac{-p}{2}x + \frac{p^2}{4b}t\right). \tag{13}$$

С учетом (13) уравнение (11) окончательно можно представить в следующем виде:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + b\frac{\partial\psi}{\partial t} + \lambda\exp\left(\frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4b}t\right) = 0. \tag{14}$$

Решение уравнения (14) представим в виде ряда

$$\psi(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}. \tag{15}$$

Последний член уравнения (14) разложим в ряд Фурье по $\sin\frac{n\pi x}{z}$.

Тогда уравнение (14) с учетом (16) можно представить в следующем виде:

$$\psi(x,\ t) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[bC_n'(t) - \frac{n^2\pi^2}{L^2}C_n(t) + H_n\right]\sin\frac{n\pi x}{L} = 0, \tag{16}$$

где

$$H_n = \frac{2}{L}\int_0^L \lambda\sin\frac{n\pi x}{L}\exp\left(\frac{p}{2}x - \frac{p^2}{4b}t\right)dx. \tag{17}$$

Решение уравнения (16) можно представить в следующем виде:

$$C_n(t) = \exp\left(\frac{n^2\pi^2}{bL^2}t\right)\left[\frac{A_n}{b}\frac{(mt-1)}{m^2}e^{mt} + \frac{B_n}{bm}e^{mt} + C_n^*\right]. \tag{18}$$

Постоянную C_n^* определяем из начального условия

$$C_n(0) = \left[\varphi(x) - \frac{z_к}{L}x - \frac{(L-x)}{L}z_н\right]\frac{e^{p/2x}}{\sin\frac{n\pi x}{L}}. \tag{19}$$

Окончательное решение линеаризованного уравнения (5) можно представить в следующем виде:

$$z(x,\ t) = \frac{x}{L}(z_к - v_к t) + \frac{L-x}{L}(z_н^c - v_н t) +$$

$$+\exp\left(\frac{p^2}{4b}t - \frac{p}{2}x\right)\sum_{n=0}^{\infty}C_n(t)\sin\frac{n\pi x}{L}, \tag{20}$$

$$C_n^* = \frac{A_n}{m^2b} - \frac{B_n}{mb} - \left[\frac{z_к}{L}x + \frac{L-x}{L}z_н - \varphi(x)\right]\frac{e^{\frac{px}{2}}}{\sin\frac{n\pi x}{L}};$$

$$A_n = \frac{2p\pi n(v_н - v_к)E_n}{L^3F_n} \tag{21}$$

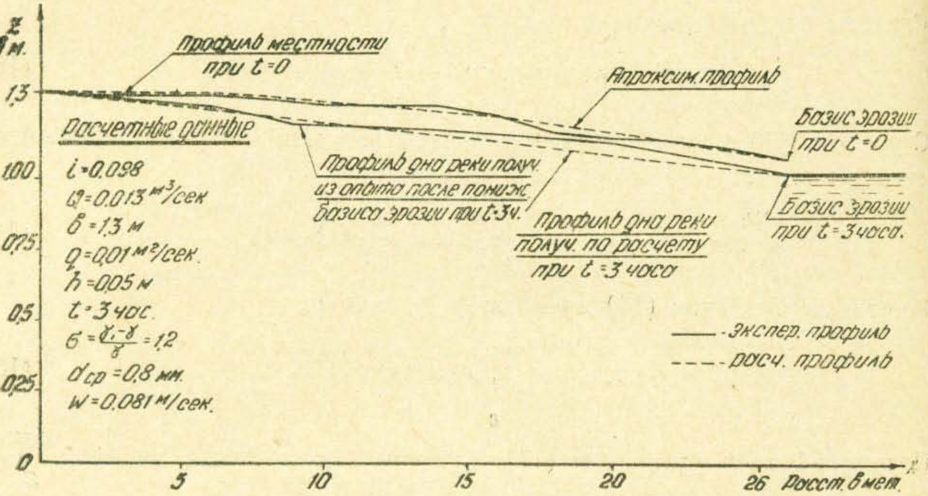

Рис. 2.

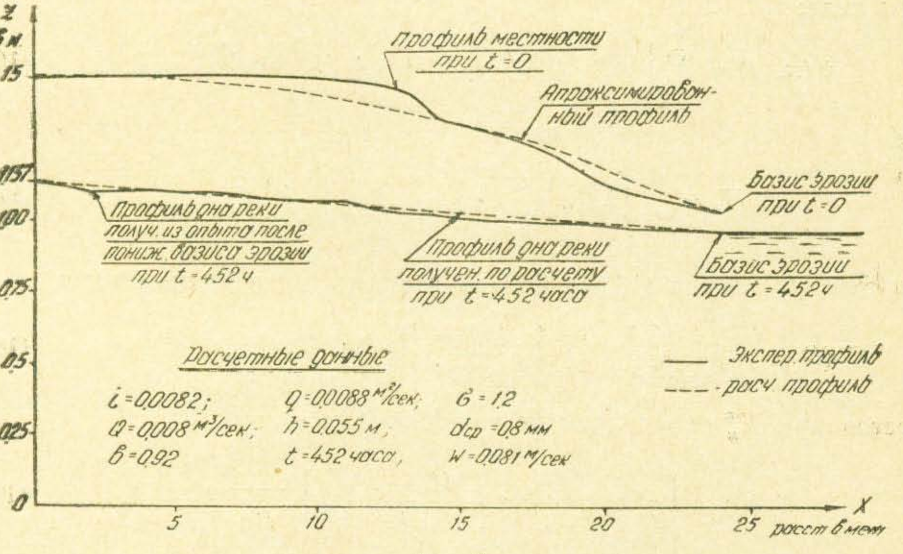

Рис. 3.

$$B_n = \frac{2n\pi\,[p\,(z_{\text{к}} - z_{\text{н}}) - bv_{\text{н}} + D]\,E_n}{F_n L^3} +$$

$$+ \frac{2n\pi b\,(v_{\text{н}} - v_{\text{к}})}{F_n L^3}\left[(-1)^n L e^{\frac{p}{2}L} - \frac{pE}{F_n}\right], \tag{22}$$

$$m = \frac{n^2\pi^2}{bL^2} - \frac{p^2}{4b};\quad E_n = \left[1 - (-1)^n e^{\frac{p}{2}L}\right];\quad F_n = \left(\frac{p}{2}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2. \tag{23}$$

По формуле (20) можно вычислить продольный профиль русла реки для любого момента времени t.

На рис. 2 и рис. 3 результаты теоретических расчетов сопоставлены с данными опытов, выполненных на модели.

Поступило 10 IV 1959