ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXVI, №5, 1973 Серия технических наук

МАШИНОСТРОЕНИЕ

Ю. Л. САРКИСЯН, Г. А. САРКИСЯН

К СИНТЕЗУ СФЕРИЧЕСКОГО ЧЕТЫРЕХЗВЕННОГО ГЕНЕРАТОРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

В работе [1] предлагается аналитический метод квадратического синтеза сферического кругового направляющего четырехзвенника с чертящей точкой на продольной оси шатуна. Однако, это частное решение не позволяет полностью использовать кинематические возможности механизма, ибо оно ограничивается вычислением лишь четырех параметров. В настоящей статье предлагается обобщенное решение этой задачи, которое позволяет вычислить все пять параметров, определяющих проектируемое двухшарнирное звено сферического механизма. На базе рассматриваемого четырехзвенника можно построить шестизвенные механизмы с заданной продолжительностью выстоя рабочего звена.

Рассматриваемая задача формулируется следующим образом. Даны размеры сферического четырехзвенника $ABCD$. Координатные системы $Oxyz$ и $OXYZ$ жестко скреплены соответственно к шатуну BC и стойке AD (рис. 1). Требуется найти такие прямые шатуна, которые при повороте ведущего звена AB на заданный угол приближенно описывают круговой конус. Легко убедиться, что подобные прямые должны минимизировать в заданном интервале движения выражение следующего вида:

$$\Delta_q = \overline{r}_m \cdot \overline{r}_M - |\overline{r}_m| \cdot |\overline{r}_M| \cdot \cos\gamma_0, \tag{1}$$

где $\overline{r}_m$ и $\overline{r}_M$ — соответственно направляющие векторы искомой прямой z и неподвижной оси z' приближаемого кругового конуса.

Без ограничения общности задачи можно предположить, что точка m лежит в плоскости $z=1$ шатуна, а точка M — в плоскости $Z=1$ стойки. Тогда выражение (1) в координатной форме записывается как

$$\Delta q_i = X_M X_{m_i} + Y_M Y_{m_i} + Z_{m_i} + C, \tag{2}$$

где $C = -|\overline{r}_M| \cdot |\overline{r}_m| \cos\gamma_0$, а через $i = 1, 2, \ldots, N$ обозначены расчетные положения ведущего звена AB, выбранные в заданном интервале движения.

Координаты точки m шатуна в неподвижной системе $OXYZ$ определяются по известным формулам линейного преобразования:

$$\begin{bmatrix} X_{m_i} \\ Y_{m_i} \\ Z_{m_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{1i} & \cos\alpha_{2i} & \cos\alpha_{3i} \\ \cos\beta_{1i} & \cos\beta_{2i} & \cos\beta_{3i} \\ \cos\gamma_{1i} & \cos\gamma_{2i} & \cos\gamma_{3i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_m \\ y_m \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

где направляющие косинусы осей Ox, Oy и Oz являются известными функциями входного угла φ и размеров четырехзвенника $ABCD$ и вычисляются по формулам, приведенным в [1].

Таким образом, минимизируемая функция Δ_q зависит от пяти

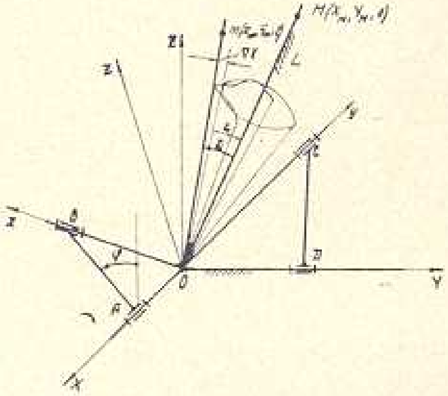

Рис. 1.

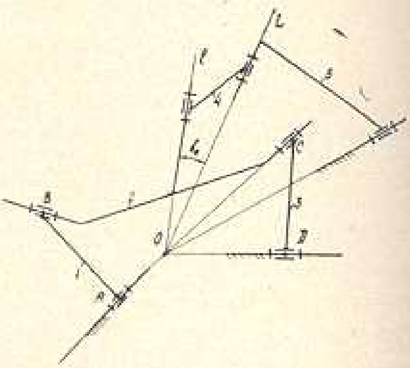

Рис. 2.

неизвестных параметров: X_M, Y_M, x_m, y_m и $C(\gamma_0)$. Составим целевую функцию следующего вида:

$$S = \sum_{i=1}^{N} \Delta_{q_i}^2.$$

Неизвестные параметры будут определены из условий стационарности суммы S:

$$\frac{\partial S}{\partial X_M} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial Y_M} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial C} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial x_m} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial y_m} = 0. \tag{4}$$

Первые три условия после несложных преобразований сводятся к системе трех линейных уравнений относительно X_M, Y_M и C:

$$\begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} X_{m_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} X_{m_i} Y_{m_i} & \sum_{i=1}^{N} X_{m_i} \\ \sum_{i=1}^{N} X_{m_i} Y_{m_i} & \sum_{i=1}^{N} Y_{m_i}^2 & \sum_{i=1}^{N} Y_{m_i} \\ \sum_{i=1}^{N} X_{m_i} & \sum_{i=1}^{N} Y_{m_i} & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_M \\ Y_M \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} Z_{m_i} X_{m_i} \\ \sum_{i=1}^{N} Z_{m_i} Y_{m_i} \\ \sum_{i=1}^{N} Z_{m_i} \end{bmatrix}. \tag{5}$$

С помощью (3) коэффициенты системы (5) могут быть выражены в виде линейных и квадратических форм от x_m и y_m. Исключение составляет коэффициент при C в третьем уравнении, который равен числу расчетных положений.

Решение системы (5) по правилу Крамера имеет вид:

$$X_m = \frac{D_X}{D}, \qquad Y_m = \frac{D_Y}{D}, \qquad C = \frac{D_C}{D}, \tag{6}$$

где через D, D_X, D_Y, D_C обозначены определитель коэффициентов и определители остальных 3×3 миноров расширенной матрицы системы (5).

Представим последние два условия системы (5) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}\Delta_{qi}\frac{\partial\Delta_{qi}}{\partial x_m} &= \sum_{i=1}^{N}(X_{m_i}X_M + Y_{m_i}Y_M + Z_{m_i} + C)x_{M_i} = 0,\\
\sum_{i=1}^{N}\Delta_{qi}\frac{\partial\Delta_{qi}}{\partial y_m} &= \sum_{i=1}^{N}(X_{m_i}X_M + Y_{m_i}Y_M + Z_{m_i} + C)y_{M_i} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Подставляя в равенства (7) соотношения (6), а также очевидные формулы:

$$\left.\begin{aligned}
x_{M_i} &= \cos\alpha_{1i}X_M + \cos\beta_{1i}Y_M + \cos\gamma_{1i}\\
y_{M_i} &= \cos\alpha_{2i}X_M + \cos\beta_{2i}Y_M + \cos\gamma_{2i}
\end{aligned}\right\}, \tag{8}$$

преобразованные с учетом (6), получаем:

$$D_X^2\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha_{ji}X_{m_i} + D_Y^2\sum_{i=1}^{N}\cos\beta_{ji}Y_{m_i} + D_X D_Y\sum_{i=1}^{N}(\cos\beta_{ji}X_{m_i} + \cos\alpha_{ji}Y_{m_i}) +$$

$$+ D_X D_C\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha_{ji}\cos\gamma_{ji} + D_Y D_C\sum_{i=1}^{N}\cos\beta_{ji}\cos\gamma_{ji} + D_X D\sum_{i=1}^{N}\cos\alpha_{ji} +$$

$$+ D_Y D\sum_{i=1}^{N}\cos\beta_{ji} + D_C D\sum_{i=1}^{N}\cos\gamma_{ji} + D^2\sum_{i=1}^{N}Z_{m_i}\cos\gamma_{ji} = 0. \tag{9}$$

$(j=1,\ 2)$

Как показывает несложный анализ, определители D_X, D_Y, D_C и D являются многочленами четвертого порядка от x_m и y_m, а коэффициенты-суммы в уравнениях (9)—линейными или нулевого порядка функциями от этих же неизвестных. В итоге мы находим, что уравнения (9) определяют на плоскости $z=1$ шатуна две кривые девятого порядка, которые условно обозначим через v_x и v_y. Далее нам удалось доказать, что максимальное число вещественных общих точек v_x и v_y равно 33. В это число входят искомые нами „квадратические круговые" точки, т. е. точки, реализующие минимум суммы квадратов Δ_{qi} во всех N расчетных положениях механизма.

Действительные решения нелинейной системы (9) находятся с помощью специально разработанного алгоритма последовательных приближений. Для любой „квадратической круговой" точки m^* по формулам (6) находится соответствующая неподвижная точка M^* и величина C^*. Легко видеть, что точка m^* единственным образом определяет подвижную ось l на шатуне, а точка M^* неподвижную ось L на стойке. Чтобы образовать двухшарнирное звено эти оси должны быть установлены под неизменным углом

$$\gamma_0 = \arccos\left(-\frac{C}{|\overline{r}_m| \cdot |\overline{r}_M|}\right). \tag{10}$$

Угловое отклонение прямой l от приближаемого кругового конуса можно вычислить по формуле

$$\Delta\gamma_i = \gamma_i - \gamma_0 = \arccos\left(\cos\gamma_0 + \frac{\Delta_{qi}}{|r_m| \cdot |r_M|} - \gamma_0\right). \tag{11}$$

Теперь чтобы построить механизм с остановкой достаточно присоединить к базисному четырехзвеннику $ABCD$ кинематическую цепь, состоящую из спроектированного звена 4 и ведомого коромысла 5 (рис. 2). При повороте кривошипа AB на заданный угол $\varphi_m - \varphi_0$, соответствующий требуемой продолжительности выстоя коромысла 5, ось l описывает приближенно круговую коническую поверхность вокруг оси L, вследствие чего звено 5 в данном промежутке по существу остается неподвижным.

Пример. На шатуне заданного сферического четырехзвенника $ABCD$ определить прямую l, приближенно описывающую круговой конус при повороте кривошипа AB от $\varphi_0 = 210°$ до $\varphi_m = 270°$.

Размеры исходного четырехзвенника равны:

$$X_A = 0{,}5; \quad Y_D = 0{,}45; \quad l_{AB} = 0{,}25; \quad l_{CD} = 1{,}2;$$

$$b = \sqrt{X_A^2 + Y_{AB}^2 - l_{AB}^2 + l_{CD}^2}.$$

Сначала проводился анализ четырехзвенника $ABCD$ и определялись направляющие косинусы подвижных осей координат. Ввиду громоздкости соответствующие формулы здесь не приводятся. После вычисления коэффициентов уравнений (9) на ЭВМ итеративным путем было найдено несколько действительных решений нелинейной системы (9), которые обеспечивают достаточно высокую точность приближения. Из точек плоскости $z=1$, соответствующих этим решениям, мы здесь рассмотрим следующие две: $m'(-0{,}772153;\ 0;\ 1)$, $m''(0{,}246018;\ -0{,}371289;\ 1)$.

Точки m' и m'' определяют на шатуне подвижные оси l' и l''. Направляющие косинусы этих осей относительно системы $Oxyz$ равны:

$$\cos\alpha_{l'} = -0{,}611163; \qquad \cos\beta_{l'} = 0; \qquad \cos\gamma_{l'} = 0{,}791505;$$

$$\cos\alpha_{l''} = 0{,}224735; \qquad \cos\beta_{l''} = -0{,}339168; \qquad \cos\gamma_{l''} = 0{,}913487.$$

Решая для найденных точек m' и m'' систему (5), находим координаты точек M' и M'' плоскости $Z=1$ в системе $OXYZ$ и величины C', C'':

$$X_{M'} = -0{,}651376; \qquad Y_{M'} = -0{,}500011; \qquad C' = 0{,}073269;$$

$$X_{M''} = 311991{,}1601; \qquad Y_{M''} = 569541{,}9062; \qquad C'' = 696694{,}2976.$$

Точки M' и M'' определяют в системе $OXYZ$ неподвижные оси L' и L'', ориентация которых относительно неподвижных осей определяется следующими значениями направляющих косинусов:

$$\cos\alpha_{L'} = -0{,}503405; \qquad \cos\beta_{L'} = -0{,}3864155; \qquad \cos\gamma_{L'} = 0{,}772831;$$

$$\cos\alpha_{L''} = 0{,}480432; \qquad \cos\beta_{L''} = 0{,}877032; \qquad \cos\gamma_{L''} = 0{,}0000015.$$

Угол между подвижной и неподвижной осями вычисляется по формуле (9).

$$\gamma_0' = 87^\circ 26' 14'', \qquad \gamma_0'' = 11^\circ 28' 20''.$$

Максимальное угловое отклонение для рассматриваемых двух вариантов равно:

$$\Delta\gamma'_{0\max} = 2'20''; \quad \Delta\gamma''_{0\max} = 1'40''.$$

ЕрПИ им. К. Маркса Поступило 30.III.1973

ՅՈՒ. Լ. ՍԱՐԳՍՅԱՆ, Գ. Ա. ՍԱՐԳՍՅԱՆ

ՊԱՐԲԵՐԱԿԱՆ ՇԱՐԺՄԱՆ ՍՖԵՐԻԿ ՔԱՌՕՂԱԿ ԳԵՆԵՐԱՏՈՐԻ ՍԻՆԹԵԶԻ ՎԵՐԱԲԵՐՅԱԼ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում քննարկվում է շրջանագծային ուղղորդ քառօղակ մեխանիզմի սինթեզի խնդիրը։ Նշված մեխանիզմին լրացուցիչ երկօղակ կինեմատիկական շղթա միացնելով կարելի է ապահովել տարվող օղակի պարբերական կանգառներով պտույտը։ Խնդիրը լուծվում է ֆունկցիաների քառակուսային մոտեցման եղանակով։ Որոշվում են մեխանիզմի 5 պարամետրները, որոնցով որոշվում են սինթեզվող օղակի շարժական և անշարժ առանցքների դիրքերը, ինչպես նաև նրանց տեղակայման անկյունը։ Բերված է թվային օրինակ։

ЛИТЕРАТУРА

Саркисян Ю. Л., Саркисян Г. А. Синтез сферического кругового направляющего четырехзвенника при заданном значении входного угла. «Известия АН Арм. ССР, Серия механика», № 5, 1972.