

НАУЧНЫЕ ЗАМЕТКИ

А. Г. НАЗАРОВ

УПРОЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ
 РАСШИРЕННОГО ПОДОБИЯ ТВЕРДЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ТЕЛ

Здесь мы приводим другое доказательство основной теоремы подобия, рассмотренной в [1]. В соответствии с определением расширенного подобия твердых тел имеем следующие соотношения между напряжением σ и деформацией ϵ для тела A и, соответственно, между σ' и ϵ' для подобного тела A' :

$$\sigma = F(\epsilon, x, y, z, t),$$

$$\frac{\sigma'}{\beta} = F\left(\frac{\epsilon'}{\gamma}, \frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\alpha}, \frac{z'}{\alpha}, \frac{t'}{\eta}\right).$$

Статическое состояние тела A можно характеризовать условиями равновесия, условиями совместности Сен-Венана, зависимостью между напряжением и деформацией и граничными условиями.

Для краткости будем выписывать по одному уравнению каждого типа:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + K_x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (2)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_y}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right), \quad (3)$$

$$\sigma = F(\epsilon, x, y, z, t), \quad (4)$$

$$\sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) + \tau_{zx} \cos(n, z) = F_{nx}; \quad (5)$$

Здесь

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xz}$ — компоненты напряжения σ ;

$\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$ — компоненты деформации ϵ ;

K_x — компонент объемных сил \bar{K} вдоль оси x ;

F_{nx} — компонент поверхностных сил \bar{F}_n вдоль оси x ;

$\cos(n, x), \cos(n, y), \cos(n, z)$ — косинусы углов между нормалью и поверхностью тела A и осями координат x, y, z .

Для тела A' , подобного телу A , соответственно имеют место следующие зависимости:

$$\frac{\partial \sigma_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \tau_{x'y'}}{\partial y'} + \frac{\partial \tau_{x'z'}}{\partial z'} + K_{x'} = 0, \quad (1')$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{x'}'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{y'}'}{\partial x'^2} = \frac{\partial \gamma_{x'y'}'}{\partial x' \partial y'} \quad (2')$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{x'z'}'}{\partial y' \partial z'} = \frac{\partial}{\partial x'} \left(-\frac{\partial \gamma_{y'z'}'}{\partial x'} + \frac{\partial \gamma_{x'z'}'}{\partial y'} + \frac{\partial \gamma_{x'y'}'}{\partial z'} \right) \quad (3')$$

$$\frac{\sigma'}{\beta} = F \left(\frac{\varepsilon'}{\gamma}, \frac{x'}{\alpha}, \frac{y'}{\alpha}, \frac{z'}{\alpha}, \frac{t'}{\eta} \right) \quad (4')$$

$$\tau_{x'}' \cos(n', x) + \tau_{y'}' \cos(n', y) + \tau_{z'}' \cos(n', z) = F_{n'x'} \quad (5')$$

Принятые здесь обозначения не требуют пояснения.

Попарное сопоставление уравнений (1) и (1'), (2) и (2') и т. д. приводит к следующим условиям инвариантности:

$$\sigma' = \beta \sigma, \quad \bar{K}' = \frac{\beta}{\alpha} \bar{K}, \quad \varepsilon' = \gamma \varepsilon, \quad F' = \beta F, \quad t' = \eta t \quad (6)$$

поскольку по условию геометрического подобия

$$x' = \alpha x, \quad y' = \alpha y, \quad z' = \alpha z, \quad \cos(n', x') = \cos(n, x), \\ \cos(n', y') = \cos(n, y), \quad \cos(n', z') = \cos(n, z).$$

Итак, можно сформулировать следующую основную теорему о подобии механических состояний подобных тел A и A' :

Подобные тела A и A' , при условии малых деформаций, находятся в подобном состоянии в сходственные моменты времени t и $t' = \eta t$, причем напряжения равны соответственно σ и $\sigma' = \beta \sigma$, деформации равны ε и $\varepsilon' = \gamma \varepsilon$ при условии, что в моменты времени t и $t' = \eta t$ напряженности поверхностных сил в сходственных точках равны \bar{F} и $\bar{F}' = \beta \bar{F}$ и интенсивности объемных сил в сходственных точках равны \bar{K} и $\bar{K}' = \frac{\beta}{\alpha} \bar{K}$.

Как следует из приведенного, здесь не дается доказательство взаимной однозначности состояний тел A и A' , которое нами было получено в [1] из других соображений.

Институт стройматериалов и сооружений
Министерства строительства Армянской ССР

ЛИТЕРАТУРА

Назаров А. Г. Известия АН Армянской ССР* (серия технических наук), т. X, 5, 1957.