ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Տեխնիկական գիտութ. սերիա XXV, № 1, 1972 Серия технических наук

ГИДРАВЛИКА

Р. М. БАРСЕГЯН

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СЛОИСТЫХ ПЛАСТАХ С ПЕРЕМЕННЫМИ МОЩНОСТЯМИ И КОЭФФИЦИЕНТАМИ ФИЛЬТРАЦИИ СЛАБОПРОНИЦАЕМЫХ ПРОСЛОЕК

В задачах о фильтрации жидкости в гидравлически связанных водоносных горизонтах мощности слабопроницаемых прослоек, разделяющих водоносные горизонты, обычно осредняются по высоте, вследствие чего движение жидкости рассматривается в горизонтально залегаемых горизонтах.

Представляет интерес произвести оценку практической допустимости осреднения мощностей слабопроницаемых прослоек. В статье производится такая оценка путем сравнения решений для двух типовых задач, относящихся к модели Мятиева-Гиринского. Сопоставляются решения задач, найденные без осреднения мощности слабопроницаемой прослойки (точные решения), с решениями с осреднением мощности слабопроницаемой прослойки (приближенные решения).

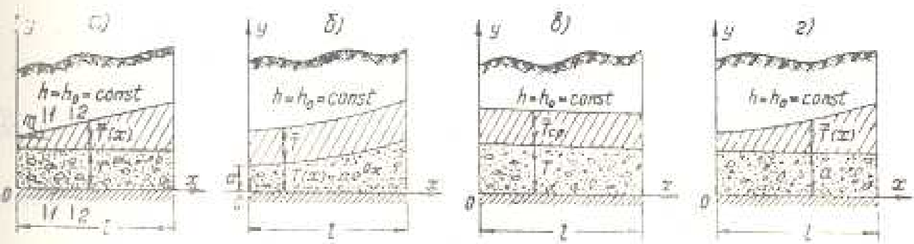

Рис. 1.

Сущность первой задачи заключается в следующем. Требуется найти решение для случая одномерной напорной установившейся фильтрации однородной несжимаемой жидкости (по закону Дарси) в трехслойном недеформируемом массиве при условии, что верхний и нижний слои сильнопроницаемы и разобщены средним слабопроницаемым слоем (рис. 1, *а*, *б* и *в*). В верхнем сильнопроницаемом слое напор $h_0 = \text{const}$. Нижняя и верхняя границы массива являются кровлями водоупора.

1°. **Точные решения задач.** а) Пусть мощность слабопроницаемой прослойки изменяется по линейному закону (рис. 1, *а*). Найдем урав-

нение, которому должен удовлетворить напор $h(x)$ в нижнем водоносном горизонте массива. Для этого составим баланс фильтрационного расхода в бесконечно малом отсеке (*1—1, 2—2*) нижнего слоя массива. Согласно закону Дарси удельный фильтрационный расход, поступающий в рассматриваемый отсек через сечение *1—1*, будет $q = -KT\frac{dh}{dx}$. Удельный фильтрационный расход, выходящий через сечение *2—2*, будет $q + dq = q - KT\frac{d^2h}{dx^2}$. Следовательно, дефицит количества жидкости в рассматриваемом отсеке за единицу времени составит $-KT\frac{d^2h}{dx^2}dx$. Этот дефицит равен удельному фильтрационному расходу, поступающему через кровлю отсека, равному $-\overline{K}\frac{h-h_0}{\overline{T}-mx}$.
Отсюда получим уравнение баланса удельного фильтрационного расхода в рассматриваемом отсеке:

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\overline{K}(h-h_0)}{KT(\overline{T}_0+mx)} = 0, \tag{1}$$

где $m = \operatorname{tg}\beta$; K и $\overline{K}$—коэффициенты фильтрации соответственно водоносного горизонта и слабопроницаемой прослойки; остальные обозначения показаны на рис. 1.

Общее решение уравнения (1) имеет вид:

$$h = h_0 + \xi[C_1 I_1(\xi) + C_2 K_1(\xi)], \tag{2}$$

где

$$\xi = \frac{2}{m}\sqrt{\frac{\overline{K}(mx+\overline{T}_0)}{KT}};$$

$I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$—модифицированные функции Бесселя первого порядка соответственно первого и второго родов.

Для определения произвольных постоянных C_1 и C_2 задаемся граничными условиями

$$h'|_{x=0} = h_1, \quad h|_{x=l} = h_2. \tag{3}$$

С помощью (3) решение (2) приводится к виду

$$h = h_0 + \xi\left\{\frac{(h_1-h_0)\xi_2[K_1(\xi_2)I_1(\xi) - I_1(\xi_2)K_1(\xi)]}{\xi_1\xi_2[I_1(\xi_1)K_1(\xi_2) - K_1(\xi_1)I_1(\xi_2)]} + \right.$$

$$\left. + \frac{(h_2-h_0)\xi_1[I_1(\xi_1)K_1(\xi) - K_1(\xi_1)I_1(\xi)]}{\xi_1\xi_2[I_1(\xi_1)K_1(\xi_2) - K_1(\xi_1)I_1(\xi_2)]}\right\}, \tag{4}$$

где

$$\xi_1 = \frac{2}{m}\sqrt{\frac{\overline{K}\,\overline{T}_0}{KT}}; \qquad \xi_2 = \frac{2}{m}\sqrt{\frac{\overline{K}(ml+\overline{T}_0)}{KT}}.$$

Отметим, что при достаточно малых $\overline{K}/K$ (например, при $\overline{K}/K \leqslant 0{,}001$) можно воспользоваться выражением

$$h = h_0 + (mx + \overline{T}_0)\left[\frac{(h_1 - h_0)(ml + \overline{T}_0)\ln\sqrt{\dfrac{ml + \overline{T}_0}{mx + \overline{T}_0}}}{\overline{T}_0(mx + \overline{T}_0)\ln\dfrac{ml + \overline{T}_0}{\overline{T}_0}} + \frac{(h_2 - h_0)\overline{T}\ln\sqrt{\dfrac{mx + \overline{T}_0}{\overline{T}_0}}}{\overline{T}_0(mx + \overline{T}_0)\ln\dfrac{ml + \overline{T}_0}{\overline{T}_0}}\right], \tag{5}$$

которое можно получить из (4), если удовлетвориться только первыми членами рядов функций $I_1(\xi)$ и $K_1(\xi)$.

б) Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ нижнего водоносного горизонта при схеме, приведенной на рис. 1, *б*. Эта задача отличается от первой тем, что мощности слабопроницаемой прослойки и основного водоносного горизонта изменяются по экспоненциальному закону.

Как и в предыдущем случае находим, что напор $h = h(x)$ удовлетворяет уравнению [1]:

$$\frac{d^2h}{dx^2} + \frac{T'(x)}{T(x)}\frac{dh}{dx} - \frac{\overline{K}(h - h_0)}{K\,T(x)\,\overline{T}(x)} = 0, \tag{6}$$

где $T(x) = ae^{bx}$ и $\overline{T}(x) = \mu ae^{bx}$ — соответственно мощности нижнего водоносного горизонта и слабопроницаемой прослойки;

$$T'(x) = abe^{bx};$$

a, b и μ — постоянные.

При граничных условиях (3) решение уравнения (6) имеет вид:

$$h = h_0 + \frac{(h_1 - h_0)\,\mathrm{sh}\sqrt{\overline{\overline{\lambda}}}\,(\xi - \xi_2) + (h_2 - h_0)\,\mathrm{sh}\sqrt{\overline{\overline{\lambda}}}\,(\xi_1 - \xi)}{\mathrm{sh}\sqrt{\overline{\overline{\lambda}}}\,(\xi_1 - \xi_2)}, \tag{7}$$

где

$$\xi = -\frac{e^{-bx}}{ab};\quad \xi_1 = -\frac{1}{ab};\quad \xi_2 = -\frac{e^{-bl}}{ab};\quad \overline{\overline{\lambda}} = \frac{\overline{K}}{K\mu}.$$

2°. **Приближенные решения задач.** При осреднении мощности слабопроницаемой прослойки (для двух вышерассмотренных задач) слои пласта становятся горизонтальными (рис. 1, *в*). В этом случае напор $h = h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\overline{K}}{KT\overline{T}_{ср}}(h - h_0) = 0, \tag{8}$$

решение которого при граничных условиях (3) имеет вид:

$$h = h_0 + \frac{(h_1 - h_0)\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\,(l - x) + (h_2 - h_0)\,\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\,x}{\mathrm{sh}\sqrt{\lambda}\,l}, \tag{9}$$

где

$$\lambda = \frac{\overline{K}}{KT\overline{T}_{\text{ср}}}.$$

Осреднение мощности слабопроницаемой прослойки по высоте для второй задачи в отличие от первой (где осреднение было произведено в пределах верхнего горизонта) влечет за собой осреднение мощности водоносного горизонта. Естественно, что в этом случае ожидаемое расхождение между значениями напоров, вычисленными точным и приближенным методами, будет значительное.

Сопоставлением величин напоров, вычисленных по формулам (4), (7) и (9) (соответственно: $h = h_т$, $h = h'_т$ и $h = h_п$) при одинаковых параметрах, входящих в эти формулы, можно судить о степени расхождения между значениями напоров в одних и тех же сечениях. В табл. 1 приводятся результаты вычислений при следующих исходных данных: $h_0 = 20$ *м*; $\beta = 5^\circ$; $\overline{T}_0 = 10$ *м*; $l = 1000$ *м*; $T = 20$ *м* [по формулам (4) и (9)]; $\overline{K} = 0{,}001$ *м/сутки*; $K = 0{,}1$ *м/сутки*. При значениях $a = 6{,}25$ и $b = 0{,}002$ осредненные по высоте мощности слабопроницаемой прослойки и нижнего водоносного горизонта второй задачи совпадают с соответственными мощностями слоев первой задачи. В четвертой и пятой строках таблицы приведены значения напоров $h'_т$ и $h''_т$, вычисленные по формуле (7), и $h''_п$—по формуле (9) при $\overline{K}/K = 0{,}0001$.

Таблица 1

Сечения, x в *м*		0	100	200	500	800	900	1000
Напоры, в *м*	$h_т$	40	33,6	31,0	32,7	43,4	51,5	60
	$h_п$	40	35,7	32,8	32,0	42,3	49,7	60
	$h'_т$	40	30,9	28,3	26,0	51,1	57,0	60
	$h''_т$	40	44,0	47,7	54,1	58,0	59,2	60
	$h''_п$	40	42,5	44,0	50,0	56,0	58,0	60

Как видно из таблицы, расхождение между точными и приближенными значениями напоров при $0{,}01\,K \leqslant \overline{K}$ значительное и при изучении фильтрации на больших территориях не следует им пренебречь.

Таким образом, при решении конкретных задач фильтрации в многослойных пластах осреднение мощностей слабопроницаемых прослоек с требуемой точностью в большинстве случаев можно считать нецелесообразным. Осреднение особенно недопустимо, если оно влечет за собой осреднение мощностей водоносных горизонтов.

Ниже дается решение некоторых конкретных задач фильтрации жидкости в многослойных пластах без осреднения мощностей слабопроницаемых прослоек. Получены уравнения движения и найдены их решения.

1. Рассмотрим фильтрацию жидкости в прямоугольном массиве, вертикальное сечение которого приведено на рис. 1, г. Требуется найти напор нижнего водоносного горизонта, если мощность слабопроницаемой прослойки изменяется по закону

$$\overline{T}(x) = ae^{bx},$$

где a и b—постоянные.

Искомый напор $h(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} - \frac{\overline{K}}{KTa} e^{-bx}(h - h_0) = 0. \qquad (10)$$

Решением уравнения (10) является

$$h(x) = h_0 + J_0(2\gamma\, ie^{-\frac{bx}{2}}) \left[C_2 - bC_1 \int \frac{dx}{J_0^2(i2\gamma e^{-\frac{bx}{2}})} \right],$$

где J_0—функция Бесселя; $\gamma^2 = \frac{\overline{K}}{KTab^2}$; C_1 и C_2—постоянные, определяемые с помощью граничных условий, которые могут быть 1-го, 2-го или 3-го родов.

2. Пусть требуется найти напор $h = h(x)$ нижнего водоносного горизонта для схемы рис. 1, a при условии, что коэффициент фильтрации слабопроницаемой прослойки $\overline{K}(x)$—линейная функция

$$\overline{K}(x) = \overline{K}_1 + \frac{\overline{K}_2 - \overline{K}_1}{l} x,$$

где $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$—коэффициенты фильтрации слабопроницаемой прослойки соответственно в сечениях $x = 0$ и $x = l$.

Искомый напор $h(x)$ нижнего водоносного горизонта удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2h}{dx^2} = \frac{\overline{K}_1 l + (\overline{K}_2 - \overline{K}_1)x}{lKT(mx + \overline{T}_0)}(h - h_0). \qquad (11)$$

С помощью подстановки

$$h - h_0 = \frac{t}{2p} e^{-\frac{t}{2}} H(t)$$

уравнение (11) преобразуется к вырожденному гипергеометрическому уравнению

$$t\frac{d^2H}{dt^2}+(2-t)\frac{dH}{dt}-\left(1+\frac{q}{2p}\right)H=0, \tag{12}$$

где

$$p^2=\frac{\overline{K}_2-\overline{K}_1}{l(KTm)^3}; \quad q=\frac{l\overline{K}_1KTm-KT\overline{T}_0(\overline{K}_2-\overline{K}_1)}{l(KTm)^3}.$$

Общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$H(t)=C_1F(n,\,2,\,t)+(n-1)\,C_2\Big[F(n,\,2,\,t)\ln t+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{2\cdot3\cdots(2+k-1)\,k!}\,t^k\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{1}{n+j}-\frac{1}{2+j}-\frac{1}{1+j}\right)\Big],$$

где

$$F(n,\,2,\,t)=1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{2\cdot3\cdots(2+k-1)k!}\,t^k$$

—вырожденная гипергеометрическая функция; $n=1+\frac{q}{2p}$. Для определения постоянных C_1 и C_2 задаются граничные условия (1-го, 2-го или 3-го родов).

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступило 8.II.1971.

Ռ. Մ. ԲԱՐՍԵՂՅԱՆ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՆ ՓՈՓՈԽԱԿԱՆ ՀԶՈՐՈՒԹՅՈՒՆ ԵՎ ՖԻԼՏՐԱՑԻԱՅԻ ԳՈՐԾԱԿԻՑ ՈՒՆԵՑՈՂ ՎԱՏ ԹԱՓԱՆՑՈՂ ՄԻՋՆԱՇԵՐՏԵՐՈՎ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ՀՈՂԱՇԵՐՏԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Բազմաշերտ հողաշերտերում հեղուկի ֆիլտրացիայի վերաբերյալ խնդիրներ լուծելիս սովորաբար վատ թափանցող շերտերի հզորությունները միջինացնում են, որի հետևանքով շերտերը ստանում են հորիզոնական դասավորություն։

Հոդվածում լուծված են խնդիրներ առանց միջինացնելով բաժանող վատ թափանցող շերտի հզորությունը։ Այդ լուծումները համեմատվում են նույն խնդիրների լուծումների հետ՝ միայն վատ թափանցող շերտի միջինացված հզորությամբ։ Պարզվում է, որ շատ դեպքերում այդ միջինացումը անթույլատրելի է։ Լուծված են նաև մի քանի խնդիրներ, երբ վատ թափանցող շերտի հզորությունը և ֆիլտրացիայի գործակիցը փոփոխական են։

ЛИТЕРАТУРА

1. *Барсегян Р. М.* Некоторые задачи неравномерной фильтрации в многослойных пластах. „Известия АН Арм. ССР, Механика“, № 6, 1970.